Система уравнений пограничного слоя.

Знаменательный успех в исследованиях движений жидкости при больших числах Рейнольдса был достигнут в 1904 году и связан с именем Л. Прандтля. Прандтль показал как можно упростить систему уравнений Навье-Стокса для того, чтобы получить её приближённое решение в предельном случае очень малой вязкости.

Как видно из автомодельных решений системы Навье-Стокса, действие вязкости на некотором расстоянии от поверхности тела почти не проявляется. Картина линий тока, а также распределение скоростей внутри жидкости в этом случае практически имеют такой же вид, как и при потенциальном течении жидкости без трения. Однако жидкость не скользит по поверхности тела, как при потенциальном течении, а прилипает к ней. Переход от нулевой скорости на стенке к скорости, фактически совпадающей со скоростью движения жидкости в модели без препятствия, совершается в очень тонком слое, называемым **пограничным** слоем. Толщина пограничного слоя $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ и при $\mathrm{Re} \to \infty$ стремится к нулю. Принято различать две области, между которыми нельзя, правда, провести резкой границы:

1. Тонкий слой в непосредственной близости от тела. Здесь $\frac{\partial}{\partial y}$ – производная в направлении, перпендикулярном к стенке, очень велика, вязкость оказывает существенное влияние на течение, **касательные напряжения** $\tau = \eta \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ велики;

2. Область, где вязкость не играет существенной роли, течение здесь практически потенциальное.

Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса в безразмерной форме в плоском двумерном случае. Пусть ось x направлена вдоль стенки, ось y – перпендикулярно стенке:

Тогда система Навье-Стокса имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \\
&\qquad u_x + v_y = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

при условиях прилипания

$$u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y)\,, \quad v\big|_{t=0} = v_0(x,y)\,.$$

Кроме того, считаем, что $u(t,x,y) \to U(t,x)$ при $y \to \infty$ и толщина пограничного слоя $\delta \ll 1$. Будем считать также, что все скорости отнесены к скорости набегающего потока U, а все длины – к характерному линейному размеру тела L, так что безразмерная величина $\frac{\partial u}{\partial x}$ в рассматриваемой области по порядку равна $O(1)$, $\mathrm{Re} = \frac{UL}{\nu} = \varrho\frac{UL}{\eta}$. Из уравнения неразрывности следует, что раз $\frac{\partial u}{\partial x} \sim 1$, то и $\frac{\partial v}{\partial y} \sim 1$, а так как $v\big|_{y=0} = 0$, то $v\big|_{y=\delta} \sim \delta$, $\frac{\partial v}{\partial x}\big|_{y=\delta} \sim \delta$, $\frac{\partial v}{\partial t}\big|_{y=\delta} \sim \delta$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\big|_{y=\delta} \sim \delta$, но $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\big|_{y=\delta} \sim 1$.

Примем, что $\frac{\partial u}{\partial t}$ ведет себя по порядку как $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, т.е. локальное ускорение приблизительно равно конвективному $u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$. Это означает, что очень внезапные ускорения, например подобные тем, которые возникают при сильных волнах давления, исключаются из рассмотрения. Оценим в величинах δ величины, входящие в первые два уравнения Навье-Стокса:

$$\begin{array}{llllll}
\dfrac{\partial u}{\partial t} + & u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + & v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} & = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + & \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \right. & \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
1 & 1 \quad 1 & \delta \quad \dfrac{1}{\delta} & & \delta^2 \quad 1 & \dfrac{1}{\delta^2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
\dfrac{\partial v}{\partial t} + & u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} + & v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} & = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + & \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. & \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\
\delta & 1 \quad \delta & \delta \quad 1 & & \delta^2 \quad \delta & \dfrac{1}{\delta}
\end{array}$$

$$\underset{1}{\frac{\partial u}{\partial x}} + \underset{1}{\frac{\partial v}{\partial y}} = 0$$

Сохраняя в уравнениях величины порядка 1, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

при условиях $u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0$, $u\big|_{t=0} = u_0(x, y)$, $u(t, x, y) \to U(t, x)$ при $y \to \infty$. Обращаем внимание, что получившаяся система включает три неизвестных функции – $\{p, u, v\}$ $\Big($ величина ϱ не меняется из-за несжимаемости, т.к.

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial y} = 0\Big) \,,$$

а уравнений в системе пограничного слоя Прандтля – два. По предложению Прандтля, из-за $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ давление считается заданным из внешнего потенциального течения и определяется уравнением Бернулли

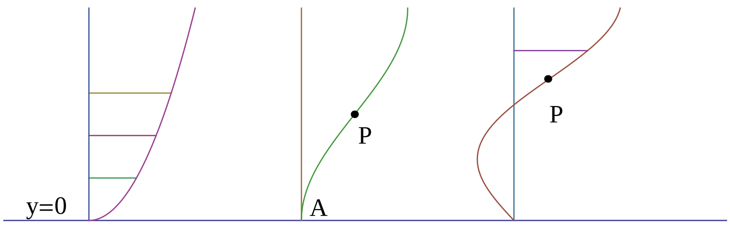
$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial x} \,,$$

где $U(t, x)$ есть скорость "проскальзывания" внешнего потенциального течения на границе $y = 0$. (Заметим, что написанная здесь система (3), составлена уже в размерных величинах).

0.1 Отрыв пограничного слоя

Рассмотрим обтекание осесимметричного тела вязкой несжимаемой жидкостью:

Можно сделать некоторые существенные выводы о физических свойствах пограничного слоя. Первое, при каких обстоятельствах происходит перенос жидкости, заторможенной в пограничном слое, во внешнее течение или отрыв течения от стенки.



$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_0 > 0\,,$ $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_0 = 0\,,$ $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_0 < 0$

Точка P – точка перегиба. В точке отрыва A не соблюдаются условия, при которых из уравнения Навье-Стокса получена система Прандтля. Обычно точка отрыва - та точка, до которой только и возможен расчет пограничного слоя. В этом случае давление, создаваемое в пограничном слое внешним течением, перестает быть известной величиной. При стационарном течении отрыв возможен лишь при $\frac{dp}{dx} > 0$. Так как

$$u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0$$

и на стенке контура тела имеется область возрастающего давления, то жидкость, заторможенная в пограничном слое и обладающая небольшой кинетической энергией, не в состоянии далеко продвинуться в область высокого давления. Она отклоняется в сторону, отрывается от тела и оттесняется во внешнее течение. Кроме того, вблизи стенки заторможенные частицы жидкости под действием градиента давления обычно начинают двигаться в сторону, противоположную направлению внешнего течения. Точка отрыва – граница между прямым и возвратным течениями в прилегающем к стенке слое:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0\,.$$

Из уравнения

$$uu_x + vu_y = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu u_{yy}$$

при $y = 0$ (на стенке) получим

$$\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = \frac{dp}{dx}\,. \tag{4}$$

Так как $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ (предположение Прандтля), то, дифференцируя (4) по переменной y, получаем

$$(uu_x + vu_y = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu u_{yy})_y\Big|_{y=0} \Rightarrow u_{yyy}\Big|_{y=0} = 0\,.$$

Если $dp/dx < 0$, то и $\partial^2 u/\partial y^2\big|_{y=0} < 0$ (профиль скоростей выпуклый). В случае замедленного течения $dp/dx > 0$ и $\partial^2 u/\partial y^2\big|_{y=0} > 0$. Так как $\partial^2 u/\partial y^2 < 0$ на некотором расстоянии от стенки, то существует точка $\mathcal{P}$ внутри пограничного слоя, такая что $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$. Точка $\mathcal{P}$ – точка перегиба профиля скоростей.

0.2 Сопротивление трения в пограничном слое.

Если в случае идеальной несжимаемой жидкости тело не испытывает сопротивления трения (парадокс Д'Аламбера), то в случае движения в приближении пограничного слоя можно определить не только распределение скоростей и точку отрыва, но и сопротивление, которое возникает вследствие трения движущейся жидкости о поверхность тела.

Касательное напряжение на стенке тела равно

$$\tau_0 = \eta\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}\,,$$

В случае плоского обтекания для сопротивления получим формулу

$$W_{\text{тр}} = b\sum_{k=0}^{l}\tau_0\cos\varphi\Delta S_k\,,$$

где b - высота тела, φ - угол между касательной и направлением U_∞ набегающего потока, S - координата вдоль тела. Так как

$$\cos\varphi\, dS = dx\,, \quad \text{получаем}$$

$$W_{\text{тр}} = b\cdot\eta\int_{x_0}^{l}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} dx\,.$$

0.3 Закон подобия в системе Прандтля.

Рассмотрим стационарную систему уравнений пограничного слоя

$$uu_x + vu_y = UU_x + \frac{1}{\text{Re}}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,, \quad u_x + v_y = 0\,,$$

при условиях $u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0$, $u \to U(x)$ при $y \to \infty$. Здесь $\text{Re} = \frac{U_\infty L}{\nu}$, где U_∞ – скорость набегающего потока, L – размер тела, ν – кинематическая вязкость. Сделаем замену

$$v' = v\sqrt{\text{Re}}\,, \quad y' = y\sqrt{\text{Re}}\,, \quad u' = u\,, \quad U' = U\,. \quad \text{Тогда}$$

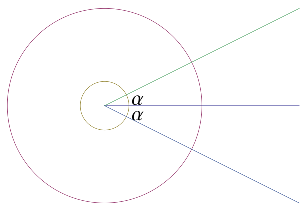
$$
\begin{cases}
u'u'_x + v\,u'_{y'} = U'U'_x + \frac{\partial^2 U'}{\partial y'^2} \\
u'_x + v'_y = 0 \\
u'\Big|_{y'=0} = v'\Big|_{y'=0} = 0, \quad u'(x,y) \to U'(x)\,, \quad \text{при } y' \to \infty.
\end{cases} \tag{5}
$$

В системе исчезла зависимость от числа Re. В пограничном слое можно считать Re $= 1$, зависимость поля скоростей от Re определяется лишь аффинным преобразованием (сравните со случаем автомодельного решения системы Навье-Стокса в окрестности критической точки). Следовательно, точка отрыва не зависит от числа Re, от Re зависит лишь угол, под которым частицы жидкости отходят от поверхности тела:

1 Течение в конфузоре и диффузоре (источник-сток)

Решение уравнений вязкой несжимаемой жидкости обычно связано с трудностями, которые возникают из-за нелинейных членов. В результате не всегда может быть получено точное решение. Поэтому представляют интерес задачи, которые имеют точное решение, одной из которых как раз и является здесь задача.

Определим движение жидкости между двумя плоскими стенками, расположенными друг к другу под углом.



В идеальной жидкости ($\nu = 0\,,$ Re $= \infty$) решение имеет вид

$$
v = \frac{Q}{2\pi r}\,,
$$

Q – мощность источника ($Q > 0$) или стока ($Q < 0$), трение о стенки при $\varphi = \pm\alpha$ отсутствует.

В полярной системе координат рассмотрим течение вида:

$$
\begin{cases}
\vartheta_r = \vartheta\,(r, Q) \\
\vartheta_q = \vartheta_z = 0 \\
p = p\,(r, Q)
\end{cases}
$$

Система Навье-Стокса будет иметь вид:

$$
\begin{cases}
\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial Q^2} - \frac{\vartheta}{r^2}\right) \\
-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial Q} + \frac{2\nu}{r^2}\frac{\partial\vartheta}{\partial Q} = 0 \\
\frac{\partial(r\vartheta)}{\partial r} = 0
\end{cases}
$$

Применим П-теорему:

$\frac{p}{\varrho} \quad v \parallel Q,\ \ r,\, \Theta,\, \alpha,\, \nu = \frac{\eta}{\varrho}$

$\frac{L^2}{T^2} \quad \frac{L}{T} \quad \frac{L^2}{T}\ L\ \ I\ \ I \quad \frac{L^2}{T},$

$\vartheta = \frac{Q}{r}u\,(Q), \quad \frac{p}{\rho} = \frac{Q^2}{r^2}p\,(Q)$ и подставим во второе уравнение системы Навье-Стокса.

$$
\begin{aligned}
&-\frac{Q^2}{\rho r^3}\frac{dp}{dQ} + \frac{2\nu Q}{r^3}\frac{du}{dQ} = 0 \\
&\frac{Q}{\nu}\frac{dp}{dQ} = 2\frac{du}{dQ} \\
&p = \frac{2\nu}{Q}u + c_1
\end{aligned}
$$

Подставляя в первое уравнение и используя $\vartheta = \frac{|Q|}{\rho\alpha r}$, получаем:

$$
\begin{aligned}
&u^{11} + 4u + \frac{Q}{\nu}u^2 = 2c_1 \\
&\frac{u^{12}}{2} + 2u + \frac{Q}{3\nu}u^3 = 2c_1 u + c_2 \\
&2Q = \pm\int\frac{du}{\sqrt{c_2 + c_1 u - \frac{Q}{6\nu}u^3 - u^2}}
\end{aligned}
$$

Это выражение определяет искомую зависимость скорости u от Q. Величина Q может быть как положительной, так и отрицательной. Если Q<0, то жидкость направлена в точку 0, которая является стоком. В этом случае говорят о течении в конфузоре. В этом случае интеграл положителен.

Влияние вязкости проявляется только в узком слое вблизи стенок, где значение скорости, соответствующее истоку, падает до нуля.

Если Q>0, то такое течение называется диффузорным.

В случае, если мощность источника невелика, под корнем в подынтегральном выражении будет положительная величина.

Симметричное расходящееся течение в диффузоре возможно при условии, $0 < \frac{Q}{\nu} < \mathrm{Re}_1$, то есть чисел Рейнольдса, не превышающих значения Re_1. При увеличении числа Рейнольдса, определяющихся условием $\mathrm{Re}_1 \leqslant \frac{Q}{\nu} \leqslant \mathrm{Re}_2$ будет решение, соответствующее одному максимуму и одному минимуму, при этом движение будет асимметрично.

При дальнейшем увеличении Re возникает симметричное решение с одним максимумом и двумя минимумами.

При $\mathrm{Re} \to \infty$ число чередующихся максимумов и минимумов возрастает ток, что не существует никакого предельного решения.

Сделаем вывод: при $\mathrm{Re} \to \infty$ решение при конфузороном течении не стремится к уравнению Эйлера, а при диффузороном, при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\max}$ движение делается неустойчивым и возникает турбулентность.

2 Решение уравнений пограничного слоя

2.1 Преобразование Мизеса

Рассмотрим систему Прандтля

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ ,$$
$$u_{|t=0} = u_0(x,y) \ , \quad u_{|y=0} = v_{|y=0} = 0,$$

$$\begin{cases} U_t + UU_x = -p_x\frac{1}{\rho} \\ u(t,x,y)_{y\to\infty} \Rightarrow U(x,y) \end{cases}$$

В стационарном случае

$$\begin{cases} uu_x + vu_y = UU_x + \nu u_{yy} \ , \\ u_x + v_y = 0 \ , \\ u_{|y=0} = v_{|y=0} = 0, \quad u(x,y)_{y\to\infty} \Rightarrow U(x), \end{cases} \tag{6}$$

$$UU_x = -p_x\frac{1}{\rho} \Rightarrow p = p_0 - \rho\frac{U^2}{2}$$

В 1927 году Мизес предложил следующее преобразование: введем функцию тока

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \ , \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

тогда будет выполнено уравнение неразрывности. Введем следующие координаты:

$$\xi = x \ , \quad \eta = \psi(x,y)$$

тогда

$$u_x = u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi - v u_\psi \ ,$$
$$u_y = u_\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} + u_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} = u u_\psi \ ,$$

Подставим эти выражения в первое уравнение системы Прандтля:

$$u u_\xi - u v u_\psi + v u u_\psi = -\frac{1}{\rho} p_\xi + \nu u \frac{\partial}{\partial \psi}(u \frac{\partial u}{\partial \psi}) \ ,$$

Введем так называемое полное давление $g = p + \rho(u^2/2)$, малой величиной $\rho(v^2/2)$ пренебрегаем. Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \nu u \frac{\partial^2 g}{\partial \psi^2} \ , \qquad u = \sqrt{\frac{2}{\rho}[g - p(x)]}$$

при условиях $g_{|\psi=0} = p(x)$, $g_{|\psi=\infty} = p(x) + \rho(u^2/2)$.

Обратное,

$$y = \int \frac{\partial \psi}{u} = \sqrt{\frac{\rho}{2}} \int_{\psi=0} \frac{\partial \psi}{\sqrt{g - p(x)}} \ ,$$

Это уравнение нелинейное, имеет особую точку при $\psi = 0$:

$$u_{|\psi=0} = 0$$

следовательно, так как $g_{|\psi=\infty} = p(x) + \rho(u^2/2)$, то

$$\frac{\partial g}{\partial x} = (\frac{\partial p}{\partial x})_{|\psi=0} \neq 0$$

так как

$$u_{|\psi=0} = 0 \ , \qquad a \qquad u \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}_{|\psi=0} \neq 0$$

то

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}_{|\psi=0} = \infty$$

Это уравнение сложно для исследования. Впервые теорема существования, единственности в физическом классе решений, т.е. функций, при которых имеет место обратное преобразование в переменные (x, y), была доказана О.А.Олейник в 1963 году. В частности, в этой работе доказана теорема существования в целом, если $\partial g/\partial x \leq 0$.

$$(ru)_x + (rv)_y = 0$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$
$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi r)}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - (\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \psi) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = U U_x + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \ ,$$
$$\psi = \psi_y = 0 \ , \qquad \text{при} \quad y = 0 \ ,$$
$$\psi_y = U(x) \ , \qquad \text{при} \quad y = \infty$$

Преобразование Крокко

1963 год. Италия.

Дана система уравнений пограничного слоя (рассматривается нестационарный случай):

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -\frac{1}{\rho}p_x + \nu u_{yy} \\ u_x + v_y = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Применим метод исключения. Исключим v из системы. Продифференцируем по y первое уравнение системы (1):

$$u_{ty} + u_y u_x + uu_{xy} + v_y u_y + vu_{yy} = \nu u_{yyy} \tag{8}$$

Выразим v из первого уравнения системы (1):

$$v = \frac{1}{u_y}(-\frac{1}{\rho}p_x + \nu u_{yy} - u_t - uu_x) \tag{9}$$

Подставим полученное выражение для v в (2). Получим

$$u_{ty} + u_y u_x + uu_{xy} + v_y u_y + \frac{1}{u_y}(-\frac{1}{\rho}p_x + \nu u_{yy} - u_t - uu_x)u_{yy} = \nu u_{yyy} \tag{10}$$

Используя соотношение $v_y = -u_x$, взаимно уничтожим второе и четвертое слагаемые в (4).

Соберем вместе u_{ty} и u_t:

$$\frac{u_y u_{ty} - u_t u_{yy}}{{u_y}^2} u_y = u_y(\frac{u_t}{u_y})_y \tag{11}$$

Дробь в левой части (5) есть производная по y отношения $(\frac{u_t}{u_y})$.

Аналогично соберем вместе uu_{xy} и uu_x:

$$\frac{u_x u_y - u_x u_{yy}}{{u_y}^2} uu_y = uu_y(\frac{u_x}{u_y})_y \tag{12}$$

Наконец, соберем вместе νu_{yy} и νu_{yyy}:

$$\frac{u_{yyy} u_y - {u_{yy}}^2}{{u_y}^2} u_y = u_y(\frac{u_{yy}}{u_y})_y \tag{13}$$

Понизим порядок ДУ (4). Для этого u_y будем искать в виде функции $f(u)$: (u_y=$f(u)$).

Введем новые переменные:

$\tau = t, \xi = x, \eta = \frac{u(t,x,y)}{U(t,x)}$.

Здесь $U(t,x)$ - внешнее течение, а 0<η<1. Причем, существует такое u, которое при y, стремящемся к бесконечности, стремится к $U(t,x)$.

Далее совершаем действия, аналогичные приведенным в преобразовании Мизеса.

Вводим новую функцию $\omega = \frac{u_y}{U}$, из которой следует, что $u_y = \omega U$.

Тогда $u_{yy} = U\omega_\eta \frac{u_y}{U} = U\omega_\eta \omega$ с учетом того, что U не зависит от y.

Аналогично $u_{yyy} = U\omega_{\eta\eta}\omega^2 + \frac{{u_{yy}}^2}{u_y}$

Используем полученное в (5)-(7).

В результате выражение (4) примет вид:

$$U\omega_\tau + U_t\omega + U_\eta(U\omega_\xi + U_x\omega) = \nu U\omega^2\omega_{\eta\eta} + \frac{1}{\rho}p_x\omega_\eta + \eta\omega_\eta\frac{U_t}{U} + \eta^2\omega_\eta U_x \tag{14}$$

После преобразования (8) в области {τ>0, 0<=ξ<X, 0<η<1} получим следующее уравнение:

$$\nu\omega^2\omega_{\eta\eta} - \omega_\tau - \eta U\omega_\xi + A\omega_\eta + B\omega = 0, \tag{15}$$

где A и B определяются из выражений:

$$A = (\eta^2 - 1)U_x + (\eta - 1)\frac{U_t}{U} \tag{16}$$

$$B = \eta(\frac{r_x U}{2} - U_x) - \frac{U_t}{U} \tag{17}$$

Эти выражения были получены при r=1.

Рассмотрим граничные условия уравнения при y=0:

$$_{y=0}|u_t + uu_x + vu_y = -\frac{1}{\rho}p_x + \nu u_{yy} \tag{18}$$

Если считать, что $v_{|y=0}$=$v_0(x)$=const, то слагаемое vu_y в (12) исчезнет.

Граничные условия при y=0 с учетом введенных выше замен будут выглядеть следующим образом:

$$(\nu\omega\omega_\eta - v_0\omega + C)|_{\eta=0} = 0, \tag{19}$$

$$\omega|_{\eta=1} = 0, u|_{\tau=0} = \omega_0 = \frac{u_{0y}}{U}. \tag{20}$$

Неклассический пограничный слой.

Запишем систему уравнений Навье-Стокса в сферической системе координат [1], положив массовые силы равными нулю:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta^2 + u_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r^2}\operatorname{ctg}\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big),$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} + \frac{u_r u_\theta - u_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\Big),$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\varphi(u_r + u_\theta\operatorname{ctg}\theta)}{r} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\Delta u_\varphi - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}(\frac{u_\varphi}{2} - \cos\theta\frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi})\Big),$$

$$\text{где}\quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

уравнение неразрывности

$$\sin\theta\frac{\partial(u_r r^2)}{\partial r} + r\frac{\partial(u_\theta\sin\theta)}{\partial \theta} + r\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Рассмотрим осесимметричное течение (для которого все частные производные по переменной φ от функций, характеризующих течение, равны нулю: $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$, $u_\varphi = 0$) в стационарном случае:

$$u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r^2}\operatorname{ctg}\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\Big),$$

$$u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\Big) \quad \text{и}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta};$$

уравнение неразрывности приобретает вид

$$r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + 2u_r + u_\theta\operatorname{ctg}\theta = 0.$$

Поскольку нас интересует решение в пограничном слое, сделаем замену переменных так, чтобы толщина пограничного слоя $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$ стала порядка 1. Рассмотрим пограничный слой вокруг единичного шара и координаты

$$r = 1 + \frac{y}{\sqrt{\mathrm{Re}}}, \quad x = \theta$$

(координата y направлена по нормали к поверхности шара, x – дуга окружности радиуса 1, соответствующая углу θ). Введём новые функции

$$u = u_\theta, \quad v = u_r\sqrt{\mathrm{Re}},$$

u – составляющая скорости по касательной, v – по нормали к шару. Система уравнений Навье-Стокса примет вид

$$\frac{uv_x}{r}+vv_y-\frac{u^2\sqrt{\mathrm{Re}}}{r}=-p_y\mathrm{Re}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(v_{yy}\mathrm{Re}+\frac{2v_y\sqrt{\mathrm{Re}}}{r}+\frac{v_{xx}}{r^2}+\frac{v_x\operatorname{ctg}x}{r^2}-\frac{2v}{r^2}-\frac{2u\operatorname{ctg}x\sqrt{\mathrm{Re}}}{r^2}-\frac{2u_x\sqrt{\mathrm{Re}}}{r^2}\Big),$$

$$\frac{uu_x}{r}+vu_y+\frac{uv}{r\sqrt{\mathrm{Re}}}=-\frac{p_x}{r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(u_{yy}\mathrm{Re}+\frac{2u_y\sqrt{\mathrm{Re}}}{r}+\frac{u_{xx}}{r^2}+\frac{u_x\operatorname{ctg}x}{r^2}-\frac{u}{r^2\sin^2 x}+\frac{2v_x}{r^2\sqrt{\mathrm{Re}}}\Big),$$

$$u_x+rv_y+\frac{2v}{\sqrt{\mathrm{Re}}}+u\operatorname{ctg}x=0.$$

Пренебрегая слагаемыми порядка $\frac{1}{\mathrm{Re}}$, получим систему уравнений неклассического пограничного слоя для обтекания единичного шара:

$$\frac{uu_x}{r}+vu_y+\frac{uv}{r\sqrt{\mathrm{Re}}}=-\frac{p_x}{r}+u_{yy}+\frac{2u_y}{r\sqrt{\mathrm{Re}}},$$

$$\frac{u^2}{r\sqrt{\mathrm{Re}}}=p_y,$$

$$u_x+rv_y+\frac{2v}{\sqrt{\mathrm{Re}}}+u\operatorname{ctg}x=0.$$

Сравним эту систему с классической

$$\begin{aligned} u\cdot u_x+vu_y&=-p_x+u_{yy}\\ 0&=-p_y\\ (ru)_x+(rv)_y&=0 \end{aligned}$$

(здесь r – расстояние от точки с координатой $x=\theta$ до оси симметрии)

$$(\sin x\,u)_x+(\sin x\,v)_y=\sin x\,u_x+\cos x\,u+\sin x\,v_y=\sin x(u_x+\operatorname{ctg}x\,u+v_y).$$

Так как $r=1+\frac{y}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$, то $r\to 1$ при $\mathrm{Re}\to+\infty$ и, если пренебречь величинами порядка $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$, то неклассический пограничный слой переходит в классический. Заметим также, что если в системе уравнений Навье-Стокса сохранить слагаемые порядка $\frac{1}{\mathrm{Re}}$, то

$$\frac{u_{xx}}{r^2\mathrm{Re}},\quad\frac{v_{xx}}{r^2\mathrm{Re}}$$

останутся и получившаяся система будет эллиптической (тем самым, по сути, никакого упрощения в сравнении с исходной системой не произойдёт). С этой точки зрения неклассический пограничный слой, как и классический, описывается более простой, параболической, системой уравнений и поэтому стационарное решение может находиться слой за слоем по оси Ox, что существенно облегчает численное исследование задачи.

Список литературы

[1] Л.И. Седов, *Механика сплошной среды*, "Наука", Москва, (1977).