Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} &= 0\,, \\
\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x^i} + \nu \Delta v^i
\end{aligned}
\tag{1}
$$

или в векторной форме

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} \bar v &= 0\,, \\
\frac{\partial \bar v}{\partial t} + (\bar v, \nabla)\bar v &= -\frac{\operatorname{grad} p}{\varrho} + \nu \Delta \bar v.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Задача Релея.

Рассмотрим плоское течение, когда $(n = 2)$

$$\bar x = (x, y), \qquad \bar v = (v^1,\ v^2) = (u(y,t),\ 0), \qquad p = p(x,\ t)$$

или $(n = 3)$

$$\bar x = (x, y, z), \qquad \bar v = (v^1,\ v^2,\ v^3) = (u(y,t),\ 0,\ 0), \qquad p = p(x,\ t).$$

Из (1)

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} \tag{3}$$

и, если $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, получаем уравнение теплопроводности (т.е. физические сущности вязкости и коэффициента теплопроводности близки). Условие $\operatorname{div} \bar v = 0$ в этой задаче выполнено автоматически. Рассмотрим следующие граничные и начальные условия

$$
\begin{aligned}
u\big|_{t=0} &= 0\,, \\
u\big|_{y=0} &= \mathcal{U} = \mathrm{const}\ :
\end{aligned}
\tag{4}
$$

в задаче Релея движение среды происходит только за счёт движения стенки, ограничивающей среду (перепад давления отсутствует).

Применяем П-теорему: ищем $u = u(\mathcal{U}, y, t, \nu)$, $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$, $[\nu] = \frac{L^2}{T}$ (из уравнения),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,, \qquad [\frac{L}{T^2}] \backsim [\frac{L^2}{T}] \cdot [\frac{L}{T \cdot L^2}].$$

Составим две безразмерные величины $\frac{u}{\mathcal{U}}$ и $\frac{y}{\sqrt{\nu t}}$ и свяжем их

$$\frac{u}{\mathcal{U}} = f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right). \tag{5}$$

Обозначим $\xi = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}$ – новая (автомодельная) переменная, f' – производная функции f. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f' \cdot \left(\frac{y}{\sqrt{\nu t}}\right)_t = -f' \cdot \frac{y}{2\sqrt{\nu t^3}}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f' \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu t}}\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{(\partial y)^2} = f'' \cdot \frac{1}{\nu t}\,.$$

Подставим (5) в уравнение и в начальные и граничные условия:

$$-\mathcal{U} f' \cdot \frac{y}{2\sqrt{\nu t^3}} = \nu \cdot f'' \cdot \frac{1}{\nu t} \qquad \text{или}$$

$$f'' = -\frac{1}{2}\,\xi f', \qquad \ln f' = -\frac{\xi^2}{4} + \ln C\,,$$

$$f' = Ce^{-\frac{\xi^2}{4}}, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \tag{6}$$

Поэтому

$$f(\xi) = C\int_0^{\xi} e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz + D, \quad D = 1, \quad 0 = C\int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz + 1\,, \quad C = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{и}$$

$$f(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{2\xi}^{\infty} e^{-z^2}\,dz\,, \quad u = \frac{2\mathcal{U}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{2y}{\sqrt{\nu t}}}^{\infty} e^{-z^2}\,dz\,.$$

Таким образом, решение задачи Релея найдено и оно удовлетворяет всем требованиям о гладкости, которые предполагались при выводе (1). Фронт двигающейся части среды в момент времени $t > 0$ при этом имеет вид

Однако почему у системы (1) должны быть только достаточно гладкие решения? Например, почему нет решений, содержащих тангенциальные разрывы, и почему

$$u(x, y) = \begin{cases} \mathcal{U} & , \ y > 0\,, \\ 0 & , \ y \leqslant 0\,, \end{cases} \tag{7}$$

$t \geqslant 0$, не есть решение? Чтобы ответить на этот вопрос, вернёмся к интегральной форме уравнений состояния:

$$\int\limits_V \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dV + \int\limits_\Gamma \varrho \cdot v^n\,dS = 0\,, \tag{8}$$

где Γ – поверхность V. Введём систему координат, связанную с поверхностью разрыва. Пусть координата x^3 направлена вдоль нормали, а x^1 и x^2 лежат в касательной плоскости к этой поверхности. Будем предполагать, что разрыв движется с постоянной скоростью (инерциальная система). Поверхность разрыва разделяет (локально) пространство на две части. Точки, принадлежащие одной части, будем отличать от точек другой части при помощи индека $+$ и $-$ (плюсовые и минусовые точки). Пусть $V(\varepsilon)$ – малая часть среды, заключенная между двумя близкими положениями поверхности разрыва в моменты t и $t+\varepsilon$. Так как при $\varepsilon \to 0$ объём множества $V(\varepsilon)$ стремится к нулю, а площадь его поверхности $\Gamma(\varepsilon)$ к нулю не стремится, то необходимо, чтобы на поверхности разрыва

$$\varrho_+ \cdot v^n_+ = \varrho_- \cdot v^n_- \qquad (\text{уравнение неразрывности}).$$

Из закона сохранения количества движения следует

$$\int\limits_V \frac{\partial(\varrho v^i)}{\partial t}\,dV + \int\limits_\Gamma (\varrho v^i \cdot v^n - \sigma^{in})\,dS = \int\limits_V f^i\,dV\,, \tag{9}$$

$\sigma^{in} = -p\delta^{in} + \tau^{in}$. Поэтому на поверхности разрыва

$$(\varrho v^i \cdot v^n + p\delta^{in} - \tau^{in})_+ = (\varrho v^i \cdot v^n + p\delta^{in} - \tau^{in})_-\,.$$

Аналогично, из закона сохранения энергии

$$\int\limits_V \frac{\partial(\varrho \cdot (E + \frac{u^2}{2}))}{\partial t}\,dV + \int\limits_\Gamma \varrho \cdot \left(E + \frac{u^2}{2}\right) \cdot (\bar{v}, \bar{n})\,dS + \int\limits_\Gamma (\sigma, \bar{v})^n\,dS + \int\limits_\Gamma q^n\,dS = \int\limits_V \varepsilon\,dV \tag{10}$$

следует, что на поверхности разрыва

$$\left(\varrho v^n\left(E + \frac{u^2}{2}\right) + (\sigma, \bar{v})^n + q^n\right)_+ = \left(\varrho v^n\left(E + \frac{u^2}{2}\right) + (\sigma, \bar{v})^n + q^n\right)_-\,.$$

Если наблюдается прохождение частиц среды через поверхность разрыва, то такое явление называется ударной волной, если же такого прохождения не наблюдается, то разрыв называют тангенциальным; если разрыв тангенциален, то это означает $v^n_+ = v^n_- = 0$, $\varrho_+ = \varrho_- = \varrho$.