Курс лекций А.В. Дмитрука
"Вариационное исчисление и оптимальное управление"
Мехмат, 4 курс 2 поток, осень 2008 года
Лекции 12–13

Существование решения в задачах на экстремум

Приведем два классических примера, в которых решение не существует.

Пример Вейерштрасса.

$$J = \int_0^1 t^2 u^2\, dt \to \min, \qquad \dot{x} = u, \qquad x(0) = 0, \qquad x(1) = 1.$$

Ищем решение в классе $u \in L_\infty[0,1]$. Ясно, что на любой допустимой функции $J(u) > 0$. Покажем, что $\inf J = 0$. Действительно, $\forall\, \varepsilon > 0$ положим $u_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon$ на $[0,\varepsilon]$, и равной нулю вне этого отрезка. Тогда

$$J(u_\varepsilon) = \int_0^\varepsilon t^2 \frac{1}{\varepsilon^2}\, dt \; = \; \frac{1}{3}\,\varepsilon \; \to 0.$$

Пример Больца.

$$J = \int_0^1 (x^2 + (u^2 - 1)^2)\, dt \to \min, \qquad \dot{x} = u, \qquad x(0) = 0, \qquad x(1) = 0.$$

Здесь опять на любой допустимой функции $J(u) > 0$. Действительно, если $J(u) = 0$, то $x(t) \equiv 0$, почти всюду $\dot{x}(t) = u(t) = 0$, но тогда $(u^2 - 1)^2 = 1$, и $J(u) > 0$, противоречие.

Покажем, что $\inf J = 0$. Для любого n положим $u_n(t) = sign\, \sin(2\pi n\, t)$. Тогда $|u_n(t)| \equiv 1$, а $|x_n(t)| \leqslant \text{const}\, \frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $J(u_n) \to 0$.

Еще проще этот эффект проявляется в задачах оптимального управления (так как в них есть возможность выбора ограничения на множество допустимых управлений).

Пример из оптимального управления.

$$J = \int_0^1 x^2\, dt \to \min, \qquad \dot{x} = u, \qquad x(0) = x(1) = 0, \qquad u \in U = \{-1, +1\}.$$

Здесь опять на любой допустимой функции $J(u) > 0$, а $u_n(t) = sign\, \sin(2\pi n\, t)$ дает $\inf J = 0$.

Возникает естественный вопрос: при каких условиях на задачу можно гарантировать, что решение (т.е. точка глобального минимума) в ней существует?

Для формулировки теорем существования потребуется следующее понятие.

Полунепрерывные снизу функции. Пусть X – топологическое пространство. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *полунепрерывной снизу в точке* x_0, если

$$f(x_0) \leqslant \varliminf_{x \mapsto x_0} f(x), \tag{0.1}$$

и просто *полунепрерывной снизу*, если это неравенство верно для всех $x_0 \in X$.

Лемма 1. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – произвольная функция. Тогда следующие три свойства эквивалентны:

а) f полунепрерывна снизу на X;

б) её надграфик $epi\, f = \{(x, z) \in X \times \mathbb{R} : \ z \geqslant f(x)\}$ замкнут в $X \times \mathbb{R}$;

в) $\forall\, \mu \in \mathbb{R}$ нижнее лебегово множество $L_\mu(f) = \{x \mid f(x) \leq \mu\}$ замкнуто в X.

Теорема Вейерштрасса. Пусть пространство X компактно, а функция $f : X \to \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу на X. Тогда f достигает на X своего минимума.

Доказательство можно провести двумя способами. Обозначим $A = \inf f$. (Априори не исключен случай $A = -\infty$.)

1) Возьмем любую минимизирующую последовательность $x_n \in X$, т.е. такую, для которой $f(x_n) \to A$. Поскольку X – компакт (но, вообще говоря, без первой аксиомы счетности), из этой последовательности можно выбрать *поднаправленность* (т.е. обобщенную последовательность) x_{n_α}, параметризованную индексом α из некоторого направленного множества, сходящуюся к некоторой точке $\hat{x} \in X$. Для нее попрежнему $f(x_{n_\alpha}) \to A$. В силу (0.1) имеем $f(\hat{x}) \leqslant A$, но так как знак $<$ здесь быть не может, получаем $f(\hat{x}) = A$.

(Если X обладает первой аксиомой счетности (напр. метрическое), то вместо поднаправленности можно брать обычную подпоследовательность; в этом случае доказательство очень прозрачно.)

2) Для любого $\mu > A$ множество подуровня $L_\mu(f)$ очевидно непусто и замкнуто. Семейство этих множеств центрировано, так как любое конечное число таких множеств имеет непустое пересечение (надо взять минимальное из данных μ, тогда соответствующее непустое $L_\mu(f)$ будет содержаться в каждом множестве из данного набора). Поскольку X – компакт, то и все эти множества имеют непустое пересечение, т.е. найдется точка $\hat{x}$, принадлежащая всем им: $f(\hat{x}) \leqslant \mu$ для любого $\mu > A$. Но тогда $f(\hat{x}) \leqslant A$, и значит $f(\hat{x}) = A$, и $A > -\infty$. $\square$

Практически все теоремы существования решения в задачах на экстремум так или иначе основаны на теореме Вейерштрасса.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Пусть мы ищем минимум функции f на некотором множестве X. Априори на этом множестве может не быть никакой топологии, и мы можем задавать ее в определенном смысле произвольно. При этом чем сильнее будет топология (т.е. чем больше запас открытых и замкнутых подмножеств в X), тем, с одной стороны, больше "шансов" для функции f быть полунепрерывной снизу на X, но с другой стороны, меньше "шансов" для множества X быть компактом. Таким образом, полунепрерывность снизу функции f и компактность X диктуют противоположные требования к топологии (первое требует ее усиления, а второе ослабления). Если удается найти топологию, удовлетворяющую обоим требованиям, то выполнены условия теореме Вейерштрасса и минимум существует.

Задача оптимального управления, выпуклая по управлению

На фиксированном отрезке времени $\Delta = [0,T]$ рассмотрим следующую задачу E:

$$J = \int_0^T L(t,x,u)\,dt \;+\varphi(x(0),x(T)) \to \min, \tag{1.1}$$

$$\dot{x} = f(t,x,u) = \; a(t,x) + B(t,x)\,u, \tag{1.2}$$

$$u(t) \in U \qquad \text{для п.в. } \; t\in\Delta, \tag{1.3}$$

$$(x(0),x(T)) \in M, \tag{1.4}$$

$$x(t) \in S(t) \qquad \forall\, t\in\Delta. \tag{1.5}$$

Здесь, как обычно, $x:\Delta\to\mathbb{R}^n$ – абсолютно непрерывная, а $u:\Delta\to\mathbb{R}^r$ – измеримая ограниченная функции.

Предположения:

A1) функция $L(t,x,u)$ непрерывна на $\Delta\times\mathbb{R}^n\times U$ и выпукла по u ,

A2) вектор-функция $a(t,x)$ и матрица $B(t,x)$ (соответствующих размерностей) непрерывны на $\Delta\times\mathbb{R}^n$, концевая функция $\varphi(x_0,x_T)$ непрерывна на $\mathbb{R}^{2n}$,

A3) множество $M\subset\mathbb{R}^{2n}$ замкнуто (как правило, оно задается некоторым набором ограничений типа равенства $\eta(x(0),x(T))=0$ и неравенства $\zeta(x(0),x(T))\leqslant 0$ с непрерывными функциями η и ζ),

A4) при каждом $t\in\Delta$ множество $S(t)\subset\mathbb{R}^n$ замкнуто, и хотя бы при одном $t_0\in\Delta$ оно ограничено: $|S(t_0)|\leqslant s_0$,

A5) множество $U\subset\mathbb{R}^r$ есть выпуклый компакт,

A6) тройка (f,S,U) удовлетворяет условию Филиппова: существует такое число K, что $\forall\, t\in\Delta,\; x\in S(t),\; u\in U$ выполнена оценка

$$|(x, f(t,x,u))| \;\leqslant\; K\,(|x|^2+1). \tag{1.6}$$

Можно ограничиться и более слабой оценкой

$$sign\,(t-t_0)\,(x, f(t,x,u)) \;\leqslant\; K\,(|x|^2+1). \tag{1.7}$$

(Если, например, $S(t)$ равномерно ограничено, то слева в (1.6) стоит ограниченная величина, поэтому условие Филиппова автоматически выполнено.)

При этих предположениях верна следующая теорема существования (первый вариант которой был доказан А.Ф. Филипповым в 1959 году):

Теорема 1. Пусть в задаче Е существует хотя бы один допустимый процесс. Тогда существует и (глобально) оптимальный процесс, т.е. функционал J достигает своего минимума.

Доказательство состоит из нескольких этапов. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество всех допустимых процессов $(x(t), u(t))$. Мы покажем, что $\mathcal{D}$ есть компакт в некоторой топологии, а J полунепрерывен снизу в этой топологии. Будем рассматривать допустимые процессы как элементы пространства $C(\Delta) \times L_\infty(\Delta)$.

1) Покажем, что множество всех допустимых траекторий $x(t)$ равномерно ограничено в пространстве $C(\Delta)$. Обозначим $z = |x|^2 + 1$. Тогда в силу (1.2) и (1.6) имеем $|\dot z| = 2\,|(x, f(t,x,u))| \leqslant 2Kz$, и так как в силу А4 $|z(t_0)| \leqslant (s_0^2 + 1)$, то $\forall\, t \in \Delta$

$$|z(t)| \;\leqslant\; |z(t_0)|\, e^{2K(t-t_0)} \;\leqslant\; (s_0^2+1)\, e^{2KT},$$

и тогда $|x(t)| \;\leqslant\; \text{const} \;=\; K_0$. (При выполнении лишь оценки (1.7) надо отдельно рассмотреть случаи $t < t_0$ и $t > t_0$.) Отсюда, из равномерной ограниченности значений $u(t)$ и непрерывности f вытекает в силу (1.2), что и $|\dot x(t)| \leqslant \text{const} = K_1$.

Таким образом, множество всех допустимых траекторий $x(t)$, рассматриваемое в пространстве $C(\Delta)$, равномерно ограничено и равномерно липшицево (а следовательно, равностепенно непрерывно). По теореме Асколи–Арцела это предкомпакт в $C(\Delta)$.

2) Рассмотрим теперь множество всех допустимых управляющих функций

$$\mathcal{U} \;=\; \{u \in L_\infty(\Delta):\quad u(t) \in U \quad \text{п.в. на } \Delta\}.$$

Поскольку U ограничено, то $\mathcal{U}$ содержится в некотором замкнутом шаре пространства $L_\infty(\Delta)$, а так как по теореме Алаоглу такой шар есть компакт в слабой-* топологии, то наше $\mathcal{U}$ есть предкомпакт в слабой-* топологии. (Напомним, что это топология сходимости на каждом элементе пространства $L_1(\Delta)$, см. КФ.)

Слабая-* топология в любом шаре пространства, сопряженном к сепарабельному (как у нас: $L_1^* = L_\infty$), метризуема, и поэтому сходимость в этой топологии можно рассматривать на обычных последовательностях.

Итак, множество $\mathcal{D}$ всех допустимых процессов $(x(t), u(t))$ есть предкомпакт в пространстве $C(\Delta) \times L_\infty(\Delta)$ относительно топологии $C \times \sigma^*$ – произведения равномерной топологии по x и слабой-* топологии по u (т.е. относительно равномерной сходимости x и слабой-* сходимости u).

Покажем теперь, что $\mathcal{D}$ замкнуто в этой топологии. Возьмем любую последовательность $(x_n, u_n) \in \mathcal{D}$, такую что $x_n \Longrightarrow \hat x \in C(\Delta)$, $u_n \xrightarrow{\text{сл.}-*} \hat u \in L_\infty(\Delta)$, и покажем, что предельная пара $(\hat x, \hat u) \in \mathcal{D}$, т.е. что она удовлетворяет всем ограничениям задачи Е.

3) Так как множества M и $S(t)$ замкнуты, для предельного $\hat x$ ограничения (1.4) и (1.5) очевидно выполнены.

4) Для проверки дифференциального уравнения (1.2) представим его в интегральной форме. Для любого $t \in \Delta$ имеем

$$x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t (a(\tau, x_n) + B(\tau, x_n)\, u_n)\, d\tau.$$

Так как $x_n(t) \Longrightarrow \hat{x}(t)$, левая часть и первые два члена в правой части очевидно сходятся к соответствующим пределам. Покажем, что $\forall\, t \in \Delta$

$$\int_0^t B(\tau, x_n)\, u_n\, d\tau \;\to\; \int_0^t B(\tau, \hat{x})\, \hat{u}\, d\tau.$$

Разность этих интегралов представим в виде

$$\int_0^t [B(\tau, x_n)\, u_n - B(\tau, \hat{x})\, u_n\,]\, d\tau \;+ \int_0^t [B(\tau, \hat{x})\, u_n - B(\tau, \hat{x})\, \hat{u}\,]\, d\tau.$$

Первый интеграл стремится к нулю, так как в силу непрерывности функции B его подинтегральное выражение равномерно стремится к нулю, а второй стремится к нулю так как $u_n \xrightarrow{\text{сл.}-*} \hat{u}$, а функция $B(\tau, \hat{x}(\tau))$ ограничена и следовательно, принадлежит $L_1(\Delta)$.

Итак, для предельной пары выполнено равенство

$$\hat{x}(t) = \hat{x}(0) + \int_0^t (a(\tau, \hat{x}) + B(\tau, \hat{x})\, \hat{u})\, d\tau, \qquad t \in \Delta.$$

Отсюда следует, что функция $\hat{x}(t)$ абсолютно непрерывна, и для пары $(\hat{x}, \hat{u})$ почти всюду на Δ выполнено уравнение (1.2).

5) Проверим слабую-* замкнутость множества управлений $\mathcal{U}$. Так как исходное множество $U \subset \mathbb{R}^r -$ выпуклый компакт, он есть пересечение некоторого семейства замкнутых полупространств $(p, u) \leqslant \alpha$, где $p \in \mathbb{R}^r$, $\alpha \in \mathbb{R}$, и пара (p, α) пробегает некоторое множество $F \subset \mathbb{R}^{r+1}$. Ясно, что достаточно рассматривать (p, α) из любого плотного подмножества в F, а в качестве такового (в силу сепарабельности $\mathbb{R}^r$) можно взять некоторое счетное множество $(p_i, \alpha_i) \in F$, $i = 1, 2, \ldots.$ Таким образом, U есть пересечение счетного семейства полупространств $U_i = \{u \in \mathbb{R}^r : \;\; (p, u) \leqslant \alpha_i\}$, $i = 1, 2, \ldots.$ Введем соответствующие множества функций

$$\mathcal{U}_i \;=\; \{u \in L_\infty(\Delta) : \quad u(t) \in U_i \quad \text{п.в. на } \; \Delta\},$$

и покажем, что $\mathcal{U} = \bigcap_i \mathcal{U}_i$. Включение $\subset$ здесь очевидно, надо установить лишь включение $\supset$. Пусть $u \in \mathcal{U}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots.$ Это означает, что $\forall\, i$ имеется множество полной меры $E_i \subset \Delta$, на котором $u(t) \subset U_i$. В силу счетной аддитивности меры Лебега множество $\bigcap_i E_i$ также имеет полную меру, и на нем $u(t) \subset \bigcap_i U_i = U$, и значит, $u \in \mathcal{U}$.

Теперь достаточно показать, что каждое множество $\mathcal{U}_i$ слабо-* замкнуто. Это вытекает из следующего простого утверждения.

Лемма 2. Пусть дана последовательность скалярных функций $v_n(t)$ из пространства $L_\infty(\Delta)$, слабо-* сходящихся к функции $\hat{v}(t)$. Пусть каждая $v_n(t) \leqslant 0$ почти всюду на Δ. Тогда и $\hat{v}(t) \leqslant 0$ почти всюду на Δ.

Доказательство. Допустим, это не так, т.е. $\hat{v}(t) > 0$ на некотором множестве E положительной меры. Тогда для характеристической функции $l(t)$ множества E в силу слабой-* сходимости должно выполняться

$$\int_0^T l(t)\, v_n(t)\, dt \;\to\; \int_0^T l(t)\, \hat{v}(t)\, dt.$$

Но интегралы слева $\leqslant 0$, а справа стоит $\int_E \hat{v}(t)\, dt > 0$ как интеграл от строго положительной функции по множеству положительной меры. Противоречие. $\square$

Применяя эту лемму для каждого i к функциям

$$v_n(t) = (p_i, u_n(t)) - \alpha_i \quad \stackrel{\text{сл.}-*}{\longrightarrow} \quad \hat{v}(t) = (p_i, \hat{u}(t)) - \alpha_i\,,$$

получаем слабую-* замкнутость каждого множества $\mathcal{U}_i$ и тем самым слабую-* замкнутость множества $\mathcal{U}$.

6) Покажем теперь, что функционал $J : C \times L_\infty \to \mathbb{R}$ полунепрерывен снизу на $\mathcal{D}$ относительно введенной сходимости. Для этого рассмотрим сначала более простой функционал $I : L_\infty(\Delta) \to \mathbb{R}$,

$$I(u) = \int_0^T \Phi(t, u)\, dt,$$

где функция Φ непрерывна по $(t, u) \in \Delta \times U$ и выпукла по u.

Теорема 2. I полунепрерывен снизу на $\mathcal{U}$ относительно слабой-* сходимости, т.е. если $u_n \stackrel{\text{сл.}-*}{\longrightarrow} \hat{u}$, то

$$\varliminf_n I(u_n) \;\geqslant\; I(\hat{u}).$$

Здесь нам потребуются следующие два факта.

Лемма 3. Пусть $u_n \in \mathcal{U}$ и $||u_n - \hat{u}||_1 \to 0$. Тогда $I(u_n) \to I(\hat{u})$, т.е. I непрерывен на $\mathcal{U}$ относительно сходимости по норме L_1 .

Доказательство. Из сходимости $u_n(t) \to \hat{u}(t)$ по норме L_1 вытекает сходимость по мере: $\forall\, \delta > 0 \qquad mes\,\{t :\ |u_n(t) - \hat{u}(t)| \geqslant \delta\} \to 0$. Покажем, что тогда и $\Phi(t, u_n(t))$ сходится по мере к $\Phi(t, \hat{u}(t))$, т.е. $\forall\, \varepsilon > 0$

$$mes\,\{t :\ |\Phi(t, u_n(t)) - \Phi(t, \hat{u}(t))| \geqslant \varepsilon\} \to 0.$$

Из непрерывности Φ по (t, u) вытекает, что $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ такое, что из неравенства $|u' - u''| < \delta$ следует, что $\forall\, t \quad |\Phi(t, u') - \Phi(t, u'')| < \varepsilon$. Поэтому для данных ε, δ

$$\{t :\ |\Phi(t, u_n(t)) - \Phi(t, \hat{u}(t))| \geqslant \varepsilon\} \;\subset\; \{t :\ |u_n(t) - \hat{u}(t)| \geqslant \delta\}.$$

Так как мера правого множества стремится к нулю, то и мера левого также стремится к нулю.

Так как функции $u_n(t)$ равномерно ограничены, то и $\Phi(t, u_n(t))$ равномерно ограничены (опять в силу непрерывности Φ), а тогда из их сходимости по мере к $\Phi(t, \hat{u}(t))$ вытекает и сходимость интегралов от этих функций. Лемма доказана. $\square$

Теорема 3 (Мазур). Пусть в нормированном пространстве V дана последовательность u_n, слабо сходящихся к $\hat{u}$ (т.е. сходящихся на каждом линейном функционале $l \in V^*$). Тогда существует последовательность конечных выпуклых комбинаций элементов u_n, сходящихся к $\hat{u}$ по норме, т.е. $\forall\, n$ существует элемент

$$v_n = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_n^{(i)}\, u_i\,, \qquad \text{где} \quad \alpha_n^{(i)} \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_n^{(i)} = 1,$$

такой что $v_n \Longrightarrow \hat{u}$.

Доказательство. Пусть $\Omega = \{u_n\,,\ \ n = 1, 2 \ldots\}$, и пусть Q есть его выпуклая замкнутая оболочка (т.е. замыкание множества всех конечных выпуклых комбинаций элементов из Ω). Теорема утверждает, что $\hat{u} \in Q$.

Действительно, если это не так, то по теореме Хана–Банаха найдется линейный функционал $l \in V^*$, строго отделяющий точку $\hat{u}$ от Q : при некотором $\delta > 0$

$$(l, \hat{u}) \ \geqslant\ (l, Q) + \delta.$$

Но это противоречит тому, что $u_n \in Q$ и $(l, u_n) \to (l, \hat{u})$. □

Теперь мы можем дать

Доказательство теоремы 2. Пусть последовательность $u_n \in L_\infty$, $u_n \xrightarrow{\text{сл.}-*} \hat{u}$, т.е. сходится относительно функционалов из L_1. Тогда (внимание!) можно считать, что $u_n \in L_1$ и $u_n \xrightarrow{\text{сл.}} \hat{u}$ относительно функционалов из L_∞ (ибо $L_\infty \subset L_1$).

Положим $A = \varliminf I(u_n)$. Нам надо показать, что $I(\hat{u}) \leqslant A$. Без нарушения общности считаем, что $I(u_n) \to A$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, N$ такое, что $\forall\, n \geqslant N$ имеем $I(u_n) < A + \varepsilon$. По теореме Мазура $\forall\, n \geqslant N$ найдется выпуклая комбинация $v_n = \sum_{i=N}^{m_n} \alpha_n^{(i)}\, u_i$ такая что $||v_n - \hat{u}||_1 \to 0$.

В силу выпуклости функции Φ по u имеем

$$I(v_n) \ \leqslant\ \sum_{i=N}^{m_n} \alpha_n^{(i)}\, I(u_i) \ <\ \sum_{i=N}^{m_n} \alpha_n^{(i)} (A + \varepsilon) \ =\ A + \varepsilon.$$

По лемме 3 $I(v_n) \to I(\hat{u})$, и следовательно, $I(\hat{u}) \leqslant A + \varepsilon$. Это выполнено $\forall\, \varepsilon > 0$. Отсюда $I(\hat{u}) \leqslant A$, ч.т.д. □

Из теоремы 2 легко вытекает слабая полунепрерывность снизу функционала $J = \int_0^T L(t, x, u)\, dt$. Пусть $x_n \Longrightarrow \hat{x}$, $u_n \xrightarrow{\text{сл.}-*} \hat{u}$. Тогда

$$J(x_n, u_n) = \ (J(x_n, u_n) - J(\hat{x}, u_n)) \ +\ J(\hat{x}, u_n).$$

Скобка справа стремится к нулю, ибо $|L(t, x_n(t), u_n(t)) - L(t, \hat{x}(t), u_n(t))| \Longrightarrow 0$ в силу равномерной непрерывности L. А последний член есть $I(u_n)$ для функции $\Phi(t, u) = L(t, \hat{x}(t), u)$. По теореме 2 $\varliminf J(\hat{x}, u_n) \geqslant J(\hat{x}, \hat{u})$, а тогда и $\varliminf J(x_n, u_n) \geqslant J(\hat{x}, \hat{u})$. Добавление концевого функционала $\varphi(x(0), x(T))$ ничего не меняет, так как от просто непрерывен относительно равномерной сходимости x.

Итак, мы показали, что в некоторой топологии множество всех допустимых процессов $\mathcal{D}$ есть компакт, а функционал J полунепрерывен снизу. По теореме Вейерштрасса J достигает своего минимума на $\mathcal{D}$. Теорема 1 доказана. $\square$

Некоторые обобщения

Рассмотренная задача E, конечно, не охватывает всех возможных типов задач оптимального управления. Укажем некоторые обобщения этой задачи, в которых также можно установить существование решения. Точные формулировки и тем более доказательства мы здесь не приводим.

а) Мы предполагали, что функции $a(t,x)$, $B(t,x)$, $L(t,x,u)$ непрерывны по совокупности своих переменных, в том числе по t. Внимательно прослеживая доказательство теоремы 1, нетрудно заметить, что от непрерывности по t можно отказаться, оставив лишь измеримость по t и потребовав, чтобы на любом ограниченном множестве значений x (или x,u) все эти функции были равностепенно относительно t непрерывны по x (или x,u), т.е. чтобы они имели общий $\forall\, t \in \Delta$ модуль непрерывности по x (или x,u).

б) Множество $U \subset \mathbb{R}^r$ может зависеть от t, т.е. ограничение на управление может иметь вид $u(t) \in U(t)$. Здесь надо требовать, чтобы для п.в. $t \in \Delta$ множество $U(t)$ было выпуклым компактом и содержалось в некотором шаре, не зависящем от t, и кроме того, чтобы многозначное отображение $t \mapsto U(t)$ было измеримым. (Одно из эквивалентных определений: для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^r$ множество $\{t:\ U(t) \cap G \neq \emptyset\}$ измеримо.)

Для доказательства слабой-* замкнутости соответствующего множества функций $\mathcal{U}$ здесь надо использовать теорему об измеримом выборе (см. ИТ).

в) Множество U может зависеть также и от x, и тогда мы фактически имеем смешанное ограничение $u(t) \in U(t,x(t))$. Здесь надо требовать, чтобы множество $U(t,x)$ было выпуклым компактом, и чтобы многозначное отображение $(t,x) \mapsto U(t,x)$ имело замкнутый график (это эквивалентно его полунепрерывности сверху). Доказательство того, что предельная пара $(\hat{x},\hat{u})$ удовлетворяет этому ограничению, т.е. $\hat{u}(t) \in U(t,\hat{x}(t))$, опирается на т.н. $Q-$ свойство Чезари, состоящее в следующем. Для любых (t,x) и любого $\varepsilon > 0$ пусть $Q_\varepsilon(t,x)$ есть замыкание выпуклой оболочки объединения $U(t',x')$ по всем (t',x') из $\varepsilon-$ окрестности (t,x). Тогда $\bigcap_{\varepsilon>0} Q_\varepsilon(t,x) = U(t,x)$.

г) Управляемая система $\dot{x} = f(t,x,u)$ может быть нелинейной по u. Тогда надо требовать, чтобы множество возможных скоростей $f(t,x,U)$ этой системы было ограниченным, а выпуклым и замкнутым было множество скоростей расширенной системы:

$$\dot{y} = L(t,x,u) + v, \qquad \dot{x} = f(t,x,u), \qquad u \in U, \qquad v \geqslant 0\,.$$

Выпуклость самого множества U не играет уже роли. Здесь надо рассматривать сходимость траекторий $(y(t),\, x(t))$ в пространстве $C[0,T]\times C^n[0,T]$, а для представления предельной траектории в виде решения указанной системы при некоторых управлениях $u(t),\, v(t)$ применять один из вариантов теоремы об измеримом выборе, например, лемму Филиппова о включении:

пусть функция $\varphi(t,u)$ измерима по t и непрерывна по $u\in U$. Тогда любая измеримая функция $v(t)\in\varphi(t,U)$ может быть реализована с помощью некоторой измеримой функции $u(t)\in U$: $\qquad v(t)=\varphi(t,u(t))$.

д) Задачи на нефиксированном отрезке времени $t\in[t_0,t_1]$ можно сводить на фиксированный отрезок с помощью введения нового времени $\tau\in[0,1]$ следующим образом:

$$\frac{dt}{d\tau}=z,\qquad \frac{dz}{d\tau}=0,\qquad \frac{dx}{d\tau}=z\,[a(t,x)+B(t,x)\,u].$$

Обратим внимание, что здесь $z-$ фазовая переменная, а не управление, как было раньше (при выводе ПМ). При этом новая управляемая система остается линейной по управлению. Для существования решения исходной задачи надо требовать, чтобы нашлась минимизирующая последовательность, на которой t_0 и t_1 ограничены. Тогда после сведения ее на фиксированный отрезок времени получим ограниченность $z,$ и при выполнении тех же условий A1—A6 решение будет существовать.

е) Пусть в задаче E множество $U-$ компакт, но не выпуклый. Здесь множество управляющих функций $\mathcal{U}$ уже не будет слабо-* замкнутым. Можно показать, что его слабое-* замыкание состоит из функций $u(t)\in co\,U$. Обозначим через $\widetilde{E}$ задачу с этим расширенным множеством управлений. Так как $co\,U-$ выпуклый компакт, по доказанной теореме 1 минимум в задаче $\widetilde{E}$ существует и достигается на некотором процессе $(\hat{x},\hat{u}),$ где $\hat{u}(t)\in co\,U.$ Как он связан с инфимумом в исходной задаче E? Рассмотрим случай, когда управляемая система полностью линейна: $\dot{x}=A(t)x+B(t)u,$ а фазовое ограничение (1.5) отсутствует. Поскольку данное управление $\hat{u}(t)$ есть слабый-* предел некоторых управлений $u_n(t)\in U,$ то нетрудно показать, что соответствующие фазовые компоненты $x_n(t)\Longrightarrow\hat{x}(t)$ (при сходимости их начальных условий), и более того, в силу линейности системы последовательность $u_n(t)\in U$ может быть выбрана таким образом, чтобы концы x_n просто совпадали с концами данной траектории $\hat{x}.$ Тогда процессы (x_n,u_n) допустимы в задаче E, $\underline{\lim}\,J(x_n,u_n)=J(\hat{x},\hat{u}),$ поэтому инфимум в задаче E равен минимуму в задаче $\widetilde{E}.$

Процесс $(\hat{x},\hat{u}),$ вообще говоря, не является допустимым в задаче E; он называется *скользящим режимом*, поскольку реализуется как предел последовательности процессов, у которых управление "очень часто" переключается между точками множества $U,$ принимая в пределе значение $\hat{u}(t)\in co\,U.$

Аналогичное явление "овыпукления" возникает также в случае, когда подинтегральная функция целевого функционала $L(t,x,u)$ не выпукла по u (как в примере Больца). Если управляемая система линейна, множество $U-$ выпукло, и опять фазовое ограничение (1.5) отсутствует, то справедлива классическая теорема Боголюбова, утверждающая, что инфимум в исходной задаче E равен инфимуму в задаче $\widetilde{E},$

в которой функцию $L(t,x,u)$ надо замененить на ее овыпукление по u, т.е. взять функцию $\widetilde{L}(t,x,u)$, которая при любых (t,x) есть наибольшая выпуклая по u миноранта функции $L(t,x,u)$.

ж) Наконец, множество U может быть неограниченным, например, $U = \mathbb{R}^r$. Здесь надо добиться того, чтобы, тем не менее, на минимизирующей последовательности нормы $||u_n||_p$ при некотором $p > 1$ были равномерно ограничены, и тогда можно считать, что множество управлений $u(\cdot)$ лежит в некотором шаре пространства $L_p(\Delta)$, и следовательно, компактно в слабой топологии. Для этого на функцию $L(t,x,u)$ накладываются условия достаточно быстрого роста по u.

Такой случай рассматривался еще в КВИ, где была установлена теорема Тонелли и ее различные варианты (см. ИТ, ОПУ).

Литература

[АФ] А.Ф. Филиппов. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. Вестник МГУ, сер. матем., мех., астрон., физ., хим., 1959, №2, с. 25–32.

[ИТ] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров. Теория экстремальных задач. М., Наука, 1974.

[АТФ] В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. Оптимальное управление. М., Наука, 1979, Физматлит, 2006.

[КФ] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

[ОПУ] Оптимальное управление. Коллективная монография кафедры ОПУ (под ред. Н.П. Осмоловского и В.М. Тихомирова), М., МЦНМО, 2008.