Дополнение 2. Построение диффеоморфизма окрестности кривой на цилиндр.

Мы докажем следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть M, N — гладкие n-мерные многообразия, M компактно, $F : M \times [0,\, 1] \to N$ — гладкое отображение, $f_0(x) = F(x,\, 0)$, $f_1(x) = F(x,\, 1)$. Пусть $y \in N$ — регулярное значение F, f_0 и f_1. Тогда $F^{-1}(y)$ является дизъюнктным объединением следов гладких простых кривых. Для каждой из них возможны четыре случая:*

1. *оба конца кривой принадлежат $M \times \{0\}$;*

2. *оба конца кривой принадлежат $M \times \{1\}$;*

3. *один конец принадлежит $M \times \{0\}$, второй — $M \times \{1\}$;*

4. *кривая замкнута и ее след содержится в $M \times (0,\, 1)$.*

При этом, если кривая незамкнута, то $M \times (\{0\} \cup \{1\})$ содержит только ее концы.

В окрестности точки y выберем локальные координаты. Тогда можно считать, что в окрестности $F^{-1}(y)$ отображение F задается как вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^n$, $F(x,\, t) = (F^1(x,\, t),\, \dots,\, F^n(x,\, t))$.

Предложение 2. *Пусть выполнены условия предложения 1, γ — связная компонента $F^{-1}(y)$, являющаяся следом незамкнутой кривой. Тогда существует ее окрестность U и диффеоморфизм $\varphi : U \to B_\varepsilon(y) \times [a,\, b]$, задаваемый равенством*

$$\varphi(x,\, t) = (F^1(x,\, t),\, \dots,\, F^n(x,\, t),\, s(x,\, t)). \tag{1}$$

При этом, в случае 1 в окрестности концов кривой $s(x,\, t) = t + a$ и $s(x,\, t) = b - t$, в случае 2 — $s(x,\, t) = t - 1 + a$ и $s(x,\, t) = b + 1 - t$, в случае 3 — $s(x,\, t) = t + a$ и $s(x,\, t) = b + t - 1$.

Обозначим $x^{n+1} = t$. Так как y — регулярная точка, то для любого $x \in \gamma$ найдется такое $k \in \{1,\, \dots,\, n\}$, что матрица Якоби отображения

$$(x^1,\, \dots,\, x^n,\, x^{n+1}) \mapsto (F^1(x,\, t),\, \dots,\, F^n(x,\, t),\, x^k)$$

(имеющего вид (1)) невырождена. Значит, в окрестности точки x это отображение является диффеоморфизмом. Более того, поскольку y — регулярное значение f_0 и f_1, то в окрестности концов кривой в качестве параметра можно взять t, так как в матрице Якоби отображения F одним из ненулевых миноров будет

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1(x,\tau)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^1(x,\tau)}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F^n(x,\tau)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F^n(x,\tau)}{\partial x^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1_\tau(x)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1_\tau(x)}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^n_\tau(x)}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n_\tau(x)}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

$\tau \in \{0,\, 1\}$. Так как множество γ компактно, то его можно покрыть конечным числом окрестностей, в которых существует диффеоморфизм вида (1). Нужно склеить эти диффеоморфизмы так, чтобы получился диффеоморфизм окрестности всей кривой на цилиндр. Достаточно эту склейку построить для двух окрестностей, дальше она получается по индукции.

Предложение 3. *Пусть $\gamma \subset M \times [0,\, 1]$ — замкнутое множество,*

$$U_1,\; U_2 \subset M \times [0,\, 1], \;\; \gamma \subset U_1 \cup U_2,$$

$\gamma \cap U_1 \cap U_2$ непусто и связно. Пусть для $i = 1,\, 2$ отображение

$$\varphi_i : U_i \to B_{\varepsilon_i}(y) \times [a_i,\, b_i], \quad \varphi_i(x,\, t) = (F^1(x,\, t),\, \dots,\, F^n(x,\, t),\, s_i(x,\, t)),$$

является диффеоморфизмом. Тогда найдутся множество $U \supset \gamma$, $\varepsilon > 0$, $a < b$ такие, что U диффеоморфно $B_\varepsilon(y) \times [a,\, b]$ и отображение вида (1) задает этот диффеоморфизм.

Доказательство. Можно считать, что $\gamma \backslash U_2 \neq \varnothing$ и $\gamma \backslash U_1 \neq \varnothing$ (иначе можно взять соответственно $U = U_1$ или $U = U_2$).

Пусть $(x_*,\, t_*) \in \gamma \cap U_1 \cap U_2$, $\tau_* = s_1(x_*,\, t_*)$. Положим $\tilde{U} = \varphi_1^{-1}(B_\varepsilon(y) \times (\tau_* - \delta,\, \tau_* + \delta))$. Если ε и δ достаточно малы, то замыкание $\tilde{U}$ содержится в $U_1 \cap U_2$. Поэтому на множестве $B_\varepsilon(y) \times [\tau_* - \delta,\, \tau_* + \delta]$ определено отображение $\tilde{\varphi} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$. Оно является диффеоморфизмом и имеет вид $\tilde{\varphi}(\tilde{y},\, \sigma) = (\tilde{y},\, f(\tilde{y},\, \sigma))$, $\tilde{y} \in B_\varepsilon(y)$, $\sigma \in (\tau_* - \delta,\, \tau_* + \delta)$. При этом, $\frac{\partial f}{\partial \sigma} \neq 0$. Заметим также, что

$$s_2(x,\, t) = f(F(x,\, t),\, s_1(x,\, t)), \;\; (x,\, t) \in \tilde{U}. \tag{2}$$

Построим склейку функций $\sigma \mapsto \sigma$ и $\sigma \mapsto f(\tilde{y},\, \sigma)$. Без ограничения общности можно считать, что $\frac{\partial f}{\partial \sigma} > 0$ (иначе вместо $s_2(t,\, x)$ рассматриваем $-s_2(t,\, x)$) и что $b_1 < a_2$ (иначе вместо $s_2(t,\, x)$ рассматриваем $s_2(t,\, x) + c$, где c — достаточно большая константа), так что $f(\tilde{y},\, \sigma) > \sigma$ при $\sigma \in [a_1,\, b_1]$.

Пусть $\psi : (\tau_* - \delta,\, \tau_* + \delta) \to [0,\, 1]$ — бесконечно гладкая неубывающая функция, $\psi|_{(\tau_* - \delta,\, \tau_* - \delta/2)} = 0$, $\psi|_{(\tau_* + \delta/2,\, \tau_* + \delta)} = 1$. Положим

$$g(\tilde{y},\, \sigma) = (1 - \psi(\sigma))\sigma + \psi(\sigma) f(\tilde{y},\, \sigma).$$

Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma}(\tilde{y},\, \sigma) = 1 - \psi(\sigma) + \psi(\sigma)\frac{\partial f}{\partial \sigma}(\tilde{y},\, \sigma) + \psi'(\sigma)(f(\tilde{y},\, \sigma) - \sigma) > 0.$$

Отсюда следует, что отображение $(\tilde{y},\, \sigma) \mapsto (\tilde{y},\, g(\tilde{y},\, \sigma))$ является диффеоморфизмом.

Положим

$$\tilde{U}_1 = \{(x,\, t) \in U_1 : \varphi_1(x,\, t) \in B_\varepsilon(y) \times [a_1,\, \tau_* - \delta]\},$$

$$\tilde{U}_2 = \{(x,\, t) \in U_2 : F(x,\, t) \in B_\varepsilon(y), s_2(x,\, t) \in [f(F(x,\, t),\, \tau_* + \delta),\, b_2]\}.$$

Тогда $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U} = \varnothing$, $\tilde{U}_2 \cap \tilde{U} = \varnothing$. В самом деле, если $(x,\, t) \in \tilde{U}$, то $s_1(x,\, t) < \tau_* + \delta$ и, значит, $s_2(x,\, t) < f(F(x,\, t),\, \tau_* + \delta)$ в силу (2). Покажем, что $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \varnothing$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. В самом деле, иначе найдется последовательность $\{(x_n,\, t_n)\} \subset \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$, сходящаяся к $(x,\, t)$, такая, что $y_n := F(x_n,\, t_n) \to y$ при $n \to \infty$. Переходя к пределу в неравенствах, получаем, что $s_1(x,\, t) \in [a_1,\, \tau_* - \delta]$ и $s_2(x,\, t) \in [f(y,\, \tau_* + \delta),\, b_2]$ и γ гомеоморфно окружности. В силу предположения, на γ найдутся точки $\xi_1 \notin U_1$, $\xi_2 \notin U_2$. Но тогда $\gamma \cap U_1 \cap U_2$ несвязно — противоречие.

Теперь определим отображение φ. Положим

$$s(x,\,t)=\begin{cases} s_1(x,\,t), & (x,\,t)\in\tilde U_1,\\ g(F(x,\,t),\,s_1(x,\,t)), & (x,\,t)\in\tilde U,\\ s_2(x,\,t), & (x,\,t)\in\tilde U_2,\end{cases}$$

$$\varphi(x,\,t)=(F^1(x,\,t),\,\ldots,\,F^n(x,\,t),\;s(x,\,t)).$$ □

Доказательство предложений 1 и 2. Пусть γ — связная компонента $F^{-1}(y)$. Тогда $\gamma=\cup_{k=1}^{m}g_k([0,\,1])$, где $g_k:[0,\,1]\to M\times[0,\,1]$ — гладкие параметризации простых кривых. Пусть $\xi_0=g_1(0)$, $\xi_1=g_1(1)$. Если $\xi_1\in M\times(0,\,1)$, то $\xi_1\in g_j([0,\,1])$ для некоторого $j\neq1$, $\xi_1=g_j(\tau)$. Положим

$$\tilde g_1(t)=\begin{cases} g_1(t),\ t\in[0,\,1],\\ g_j(t-1+\tau),\ t\in[1,\,2-\tau].\end{cases}$$

Это параметризация некоторой гладкой кривой. Если существуют такие различные $t',\,t''\in[0,\,2-\tau]$, что $\tilde g_1(t')=\tilde g_1(t'')$, то $\tilde g_1([0,\,2-\tau])$ гомеоморфно окружности, а значит, и γ является следом замкнутой кривой. Пусть $\tilde g_1$ инъективно. Если

$$\tilde g_1(2-\tau)\in M\times(0,\,1),$$

то проводим аналогичные рассуждения, иначе рассматриваем точку ξ_0. Тем самым, по индукции получаем доказательство предложения 1. (Поскольку y является регулярным значением f_0 и f_1, то замкнутая кривая не пересекается с $M\times(\{0\}\cup\{1\})$).

Предложение 2 получается из предложения 3 по индукции. □