Лекция 9. Движение по цилиндрической трубе среды Бингама: задача минимизации, величина предельной нагрузки.

Рассмотрим течение вязкопластической среды по трубе под действием постоянного градиента давлений. В этом случае $\Omega = D \times [-L, L]$, где $D \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область с диаметром, много меньшим, чем L,

$$J(v) = \int_{-L}^{L} \int_{D} \varphi(e_v)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 - \int_{D} P(-L) v_3(x_1, x_2, -L)\, dx_1\, dx_2 - \int_{D} P(L) v_3(x_1, x_2, L)\, dx_1\, dx_2.$$

Предполагаем, что $v|_{\partial D} = 0$.

В качестве кинематически допустимых полей будем рассматривать множество вектор-функций v, явно не зависящих от x_3 и таких, что $\mathrm{div v} = 0$, $v|_{\partial D} = 0$.

Из физических соображений естественно искать минимизирующее поле скоростей в виде

$$(v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3)) = (0, 0, u(x_1, x_2)). \tag{1}$$

В этом случае тензор скоростей деформации e_{ij} при $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 3$ имеет только две ненулевые компоненты:

$$e_{i3}(v) = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = 1, 2.$$

Упражнение. Пусть $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — четная выпуклая функция, $f(e) = g(|e|)$, где $e \in \mathbb{R}^n$, $|e|$ — евклидова норма. Доказать, что тогда f выпукла и

$$\partial f(e_0) = \left\{ t\frac{e_0}{|e_0|} : t \in \partial g(|e_0|) \right\},\quad e_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \quad \partial f(0) = \{s \in \mathbb{R}^n : |s| \leqslant g'_+(0)\}. \tag{2}$$

Предложение 1. *Если $\varphi(e_v)$ явно зависит только от*

$$\sum_{i,j=1}^{3} e_{ij}(v)^2 \equiv 2e_{12}(v)^2 + 2e_{13}(v)^2 + 2e_{23}(v)^2 + e_{11}(v)^2 + e_{22}(v)^2 + (e_{11}(v) + e_{22}(v))^2$$

и $\hat{v} = (0, 0, \hat{u}(x_1, x_2))$ — точка минимума ограничения функционала J на подпространство функций вида (1), то $\hat{v}$ является точкой минимума J на всем пространстве кинематически допустимых полей.

Доказательство. По условию, $\varphi(e) = g\left(\sqrt{2\sum\limits_{i,j=1}^{3} e_{ij}(v)^2}\right)$ для некоторой четной выпуклой функции g. Положим $\psi(\xi_1, \xi_2) = g(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})$, $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда для функций вида (1) выполнено

$$\varphi(e) = g\left(\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2}\right) = \psi\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right).$$

Запишем принцип виртуальных мощностей для подпространства функций вида (1), то есть условие минимума функционала

$$\int\limits_{-L}^{L}\int\limits_{D}\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)dx-\int\limits_{D}\left[P(-L)+P(L)\right]u(x_1,\,x_2)\,dx_1\,dx_2:$$

найдутся измеримые функции s_1, s_2 такие, что

$$(s_1(x),\,s_2(x))\in\partial\psi\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x),\,\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right)$$

и

$$\int\limits_{-L}^{L}\int\limits_{D}\left[s_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+s_2\frac{\partial z}{\partial x_2}\right]dx-\int\limits_{D}\left[P(-L)+P(L)\right]z(x_1,\,x_2)\,dx_1\,dx_2=0$$

для любой допустимой функции z. В силу (2), если $\nabla u(x)\neq 0$, то $(s_1(x),\,s_2(x))=t\frac{\xi}{|\xi|}$, где $t\in\partial g(|\nabla u(x)|)$, $\xi=\nabla u(x)$, а если $\nabla u(x)=0$, то $\sqrt{s_1^2(x)+s_2^2(x)}\leqslant g'_+(0)$.

Построим функцию $s:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^5$ такую, что $s(x)\in\partial\varphi(e_{\hat v}(x))$ и для любой допустимой функции h выполнено

$$\int\limits_{\Omega}s(x)e_h(x)\,dx-\int\limits_{D}\left[P(-L)+P(L)\right]h_3(x_1,\,x_2)\,dx_1\,dx_2=0. \tag{3}$$

По теореме о приведении квадратичной формы к нормальному виду, найдутся такие $\tilde e_1(v)$, $\tilde e_2(v)$, являющиеся линейными комбинациями $e_{11}(v)$ и $e_{22}(v)$, что

$$\sum_{i,j=1}^{3}e_{ij}(v)^2=2e_{12}(v)^2+2e_{13}(v)^2+2e_{23}(v)^2+2\tilde e_1(v)^2+2\tilde e_2(v)^2.$$

Тогда

$$s\cdot e_h=s_{12}e_{12}(h)+s_{23}e_{23}(h)+s_{13}e_{13}(h)+\tilde s_1\tilde e_1(h)+\tilde s_2\tilde e_2(h),$$

где $\tilde s_1$ и $\tilde s_2$ являются линейными комбинациями s_{11} и s_{22}. Обозначим

$$\tilde e_v=(e_{13},\,e_{23},\,e_{12},\,\tilde e_1,\,\tilde e_2),\quad \tilde s=(s_{13},\,s_{23},\,s_{12},\,\tilde s_1,\,\tilde s_2),\quad \tilde\varphi(\tilde e_v)=g(|2\tilde e_v|).$$

Положим $s_{13}(x)=2s_1(x)$, $s_{23}(x)=2s_2(x)$, $s_{12}(x)=\tilde s_1(x)=\tilde s_2(x)=0$. Если $e_{\hat v}(x)\neq 0$, то $\tilde s(x)=2t\frac{e_{\hat v}(x)}{|e_{\hat v}(x)|}$, где $t\in\partial g(|\nabla u(x)|)=\partial g(|2\tilde e_v|)$. Заметим, что если $g_1(\xi)=g(2\xi)$, то $\partial g_1(\xi)=2\partial g(2\xi)$. Отсюда и из (2) получаем, что $\tilde s(x)\in\partial\tilde\varphi(\tilde e_{\hat v}(x))$ и $s(x)\in\partial\varphi(e_{\hat v}(x))$. Случай $e_{\hat v}(x)=0$ рассматривается аналогично.

Пусть h — приращение кинематически допустимых полей. Тогда $s(x)e_h(x)=s_1(x)\frac{\partial h_3}{\partial x_1}(x)+s_2(x)\frac{\partial h_3}{\partial x_2}(x)$ (так как h не зависит от x_3). Значит,

$$\int\limits_{-L}^{L}\int\limits_{D}s(x)e_h(x)\,dx-\int\limits_{D}\left[P(-L)+P(L)\right]h_3(x_1,\,x_2)\,dx_1\,dx_2=$$

$$=\int\limits_{-L}^{L}\int\limits_{D}\left[s_1\frac{\partial h_3}{\partial x_1}+s_2\frac{\partial h_3}{\partial x_2}\right]dx-\int\limits_{D}\left[P(-L)+P(L)\right]h_3(x_1,\,x_2)\,dx_1\,dx_2=0.$$

Тем самым, для $\hat v$ выполнено соотношение (3) и $\hat v$ является точкой минимума J. $\square$

Заметим, что задача минимизации функционала J на подпространстве функций вида (1) эквивалентна задаче минимизации функционала

$$J_0(u) = \int_D \psi\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x),\, \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2}(x)\right) dx - c\int_D u\, dx,$$

где $c = \frac{P(L)+P(-L)}{2L}$. При этом можно считать, что $c > 0$.

Рассмотрим модель Бингама:

$$\varphi(e) = \frac{\mu}{2}|2e|^2 + \tau_0|e|, \ \ \mu > 0,\ \tau_0 > 0.$$

Получаем следующую минимизационную задачу:

$$J_0(u) := \frac{\mu}{2}\int_D |\nabla u|^2\, dx + \tau_0\int_D |\nabla u|\, dx - c\int_D u\, dx \to \min, \quad u \in \mathring{W}_2^1(D). \tag{4}$$

По теореме существования, функционал J_0 имеет точку минимума. В силу сильной выпуклости J_0, решение задачи (4) единственно и непрерывно зависит от μ и τ_0.

1 Величина предельной нагрузки

Найдем константу c_*, удовлетворяющую следующему условию: 0 — решение (4) тогда и только тогда, когда $c \in [0,\, c_*]$.

Теорема 1. *Имеет место формула*

$$c_* = \tau_0 \inf_{D' \subset D} \frac{|\partial D'|}{|D'|}, \tag{5}$$

где $\inf$ *берется по множеству областей $D' \subset D$, граница которых является конечным объединением спрямляемых кривых; $|\partial D'|$ — длина границы D', $|D'|$ — площадь D'.*

Доказательство. Шаг 1. Минимум функционала J_0 достигается в нуле тогда и только тогда, когда $0 \in \partial J_0(0)$. По теореме Моро–Рокафеллара, это равносильно тому, что $0 \in \partial J_1(0)$, где

$$J_1(u) = \tau_0\int_D |\nabla u|\, dx - c\int_D u\, dx.$$

По определению субдифференциала, $0 \in \partial J_1(0)$ тогда и только тогда, когда

$$\tau_0\int_D |\nabla u|\, dx - c\int_D u\, dx \geqslant 0, \quad u \in \mathring{W}_2^1(D),$$

так что

$$c_* = \tau_0 \inf_{u \in \mathring{W}_2^1(D),\, u \neq 0} \frac{\int_D |\nabla u|\, dx}{\left|\int_D u\, dx\right|}.$$

Шаг 2. Заметим, что в силу непрерывности числителя и знаменателя достаточно брать инфинум по всюду плотному множеству.

Скажем, что $u \in \tilde{W}$, если существует открытое множество $\tilde{D} \subset D$ такое, что $\partial\tilde{D} \subset D$ — конечное объединение ломаных, $u|_{D\setminus\tilde{D}} = 0$ и существует разбиение $\tilde{D}$ на треугольники Δ_i ($1 \leqslant i \leqslant m$) такое, что для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ функция $u|_{\Delta_i}$ является аффинной и не является константой.

Покажем, что множество $\tilde{W}$ плотно в $\mathring{W}_2^1(D)$. В самом деле, возьмем произвольные $\varepsilon > 0$ и $u \in \mathring{W}_2^1(D)$. Найдем функцию $\tilde{u} \in C_0^\infty(D)$ такую, что $\|u - \tilde{u}\|_{W_2^1(D)} < \varepsilon/2$, и продолжим ее нулем на $\mathbb{R}^2\setminus D$. Поместим D в квадрат и разобьем его на достаточно малые замкнутые равнобедренные прямоугольные треугольники Δ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, катеты которых параллельны осям координат. Обозначим

$$T = \{i = 1, \ldots, m : \Delta_i\setminus D \neq \varnothing\}.$$

Если длины сторон треугольников достаточно малы, то $\tilde{u}|_{\Delta_i} = 0$ для любого $i \in T$. Положим $\tilde{D} = \cup_{i\notin T}\Delta_i$. Пусть $i \notin T$, $\xi_{i,j}$, $j = 1, 2, 3,$ — вершины треугольника Δ_i. Определим $\hat{u}|_{\Delta_i}$ как аффинную функцию такую, что $\hat{u}(\xi_{i,j}) = \tilde{u}(\xi_{i,j})$, $1 \leqslant j \leqslant 3$. Если $i \in T$, то положим $\hat{u}|_{\Delta_i} = 0$.

По теореме о среднем, найдутся такие точки η и ζ, принадлежащие одному из катетов треугольника Δ_i, что $\tilde{u}_{x_1}(\eta) = \hat{u}_{x_1}(\eta)$, $\tilde{u}_{x_2}(\zeta) = \hat{u}_{x_2}(\zeta)$. Поэтому при достаточно мелком разбиении в силу равномерной непрерывности $\tilde{u}$ и ее производных получаем, что $\|\hat{u} - \tilde{u}\|_{W_2^1(D)} < \varepsilon/2$. Немного изменив значения $\hat{u}$ в вершинах, можно добиться того, чтобы она не была константой на треугольниках Δ_i при $i \notin T$.

Шаг 3. Заметим, что если $u \in \tilde{W}$, то $|u| \in \tilde{W}$, поэтому достаточно рассматривать неотрицательные функции.

Пусть $u \in \tilde{W}$, $u \geqslant 0$. Тогда

$$\frac{\int\limits_D |\nabla u|\, dx}{\int\limits_D u\, dx} = \frac{\int\limits_{\tilde{D}} |\nabla u|\, dx}{\int\limits_{\tilde{D}} u\, dx}.$$

Положим $A = \max_{x\in\tilde{D}} u(x)$. При $0 < s < A$ линии уровня $\{x \in D : u(x) = s\}$ являются конечным объединением ломаных, поэтому определена сумма их длин $l_u(s)$. Докажем равенства

$$\int\limits_{\tilde{D}} |\nabla u|\, dx = \int\limits_0^A l_u(s)\, ds, \tag{6}$$

$$\int\limits_{\tilde{D}} u\, dx = \int\limits_0^A S_u(s)\, ds, \tag{7}$$

где $S_u(s)$ — плоская мера множества точек $\{x : u(x) \geqslant s\}$.

В силу аддитивности, (6) достаточно проверить для случая, когда $\tilde{D}$ — треугольник, а функция $u|_{\tilde{D}}$ является аффинной. Снова пользуясь аддитивностью и аппроксимируя треугольник конечным объединением квадратов, получаем, что достаточно рассмотреть случай, когда $\tilde{D}$ является квадратом, одна из сторон которого параллельна линии уровня функции u. Если l — длина его стороны, O_ξ — координатная ось, параллельная линии уровня функции u, ось O_η перепендикулярна O_ξ, $A_1 = \min_{x\in\tilde{D}} u(x)$, $A_2 = \max_{x\in\tilde{D}} u(x)$, то $\frac{\partial u}{\partial\xi} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial\eta} = \frac{A_2 - A_1}{l}$, $\int\limits_{\tilde{D}} |\nabla u|\, dx = (A_2 - A_1)l = \int\limits_0^A l_u(s)\, ds$.

Равенство (7) следует из теоремы Фубини, поскольку левая и правая части этого соотношения равны объему множества $\{(x,\,t) : x \in \tilde{D},\ 0 < t < A\}$.

Тем самым,

$$\inf_{u\in\tilde{W}} \frac{\int\limits_D |\nabla u|\,dx}{\left|\int\limits_D u\,dx\right|} = \inf_{u\in\tilde{W}} \frac{\int\limits_0^A l_u(s)\,ds}{\int\limits_0^A S_u(s)\,ds} \geqslant \inf_{D'\subset\tilde{D}} \frac{|\partial D'|}{|D'|},$$

где инфинум берется по множеству конечных объединений областей, граница которых является конечным объединением спрямляемых кривых. Если $D' = \cup_{i=1}^n D'_i$, где D_i — связные компоненты D', то

$$\frac{|\partial D'|}{|D'|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^n |\partial D'_i|}{\sum\limits_{i=1}^n |D'_i|} \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{|\partial D'_i|}{|D'_i|}.$$

Поэтому инфинум достаточно брать по множеству областей.

Шаг 4. Докажем, что

$$\inf_{u\in\tilde{W}} \frac{\int\limits_0^A l_u(s)\,ds}{\int\limits_0^A S_u(s)\,ds} \leqslant \inf_{D'\subset\tilde{D}} \frac{|\partial D'|}{|D'|}.$$

Из определения длины спрямляемой кривой следует, что достаточно брать инфинум по множеству областей, граница которых является конечным объединением жордановых ломаных. Пусть дана такая область D'. Построим функцию $u \in \tilde{W}$ следующим образом. Пусть $\partial D'$ является конечным объединением отрезков l_i. Рассмотрим отрезки $\tilde{l}_i$, лежащие в D', параллельные l_i и находящиеся от них на расстоянии ε. Получаем ломаную L_ε, ограничивающую область D_ε. Тогда можно построить функцию $u \in \tilde{W}$ такую, что $u|_{D\setminus D'} = 0$, $u|_{D_\varepsilon} = 1$ и $u|_{\mathcal{T}_i}$ является аффинной, где $\mathcal{T}_i$ — трапеция с параллельными сторонами l_i и $\tilde{l}_i$. Отсюда

$$\frac{\int\limits_0^1 l_u(s)\,ds}{\int\limits_0^1 S_u(s)\,ds} = \frac{\int\limits_0^1 (|\partial D| + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(1))\,dx}{\int\limits_0^1 (|D| + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(1))\,dx} \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \frac{|\partial D|}{|D|}.$$

$\square$

Замечание. Если область D является p-связной, то инфинум достаточно брать по множеству k-связных областей, где $k \leqslant p$. Если D выпукла, то инфинум достаточно брать по множеству выпуклых областей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, “Механика жесткопластических сред”. М.: Наука, 1981.

[2] П.П. Мосолов, В.П. Мясников, “Вариационные методы в теории течений жестко-вязкопластических сред”. М.: Изд-во МГУ, 1971.