Лекция 13. Вязкопластические среды: численное решение с помощью алгоритма Узавы.

Из теоремы Мазура следует

Предложение 1. *Пусть X — банахово пространство, $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} x$. Тогда существует последовательность конечных выпуклых комбинаций векторов x_n, сходящаяся к x по норме.*

Пусть $(X,\, \tau)$ — топологическое пространство. Функция $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется секвенциально полунепрерывной снизу, если для любой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\overset{\tau}{\to}} x$ выполнено $f(x) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} f(x_n)$.

Если $(X,\, \rho)$ — метрическое пространство, то полунепрерывность снизу эквивалентна секвенциальной полунепрерывности снизу. Слабая топология на бесконечномерном банаховом пространстве не метризуема, однако из предложения 1 следует

Предложение 2. *Если X — банахово пространство, $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ выпукла и полунепрерывна снизу, то она секвенциально полунепрерывна снизу относительно слабой топологии.*

Множество $M \subset X$ называется секвенциально компактным, если из любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке из M. Для метрических пространств компактность эквивалентна секвенциальной компактности. Оказывается, для слабой топологии выполнено то же самое: множество слабо компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально слабо компактно (**теорема Эберлейна – Шмульяна**).

1 Существование седловой точки.

Пусть X, Y — банаховы пространства, $\mathcal{L} : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Точка $(\overline{x},\, \overline{y}) \in X \times Y$ называется седловой точкой функции $\mathcal{L}$, если для любых $x \in X$, $y \in Y$ выполнено $\mathcal{L}(\overline{x},\, y) \leqslant \mathcal{L}(\overline{x},\, \overline{y}) \leqslant \mathcal{L}(x,\, \overline{y})$.

Мы докажем теорему о существовании седловой точки в следующей формулировке:

Теорема 1.1. *Пусть X, Y — рефлексивные банаховы пространства, $M \subset Y$ выпукло, замкнуто и ограничено, $\mathcal{L} : X \times M \to \mathbb{R}$, для любых $x \in X$, $y \in M$ функции $\mathcal{L}(\cdot,\, y) : X \to \mathbb{R}$ и $-\mathcal{L}(x,\, \cdot) : Y \to \mathbb{R}$ являются выпуклыми и полунепрерывными снизу и*

$$\mathcal{L}(x,\, y) \underset{\|x\|\to+\infty}{\to} +\infty \text{ равномерно по } y \in M. \tag{1.1}$$

Пусть, кроме того, для любого $y \in M$ функция $\mathcal{L}(\cdot,\, y)$ строго выпукла.[1] *Тогда $\mathcal{L}$ имеет седловую точку.*

Доказательство. Так как функция $\mathcal{L}(\cdot,\, y)$ выпукла, коэрцитивна и полунепрерывна снизу, то она имеет точку минимума e_y. Кроме того, из строгой выпуклости следует, что e_y единственна для любого $y \in M$. Положим $f(y) = \mathcal{L}(e_y,\, y)$. Тогда $-f(y) =$

[1] От этого условия можно избавиться (см. [2]), но для приложения к задаче о движении среды Бингама достаточно такой формулировки.

$\max_{x\in X}(-\mathcal{L}(x,\,y))$ является выпуклой и полунепрерывной снизу на M (поскольку задается как максимум функций с такими свойствами). Значит, f достигает максимума в некоторой точке $\overline{y}$.

Положим $\overline{x} = e_{\overline{y}}$. Мы покажем, что $(\overline{x},\,\overline{y})$ является седловой точкой. Пусть $y \in M$, $\lambda_n \in (0,\,1)$, $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$, $y_n = (1-\lambda_n)\overline{y} + \lambda_n y$, $x_n = e_{y_n}$. Тогда из определения $\overline{y}$, $e_{\overline{y}}$ и вогнутости $\mathcal{L}$ по второму аргументу получаем

$$f(\overline{y}) \geqslant f(y_n) = \mathcal{L}(x_n,\,(1-\lambda_n)\overline{y} + \lambda_n y) \geqslant$$

$$\geqslant (1-\lambda_n)\mathcal{L}(x_n,\,\overline{y}) + \lambda_n\mathcal{L}(x_n,\,y) \geqslant (1-\lambda_n)f(\overline{y}) + \lambda_n\mathcal{L}(x_n,\,y).$$

Значит,

$$f(\overline{y}) \geqslant \mathcal{L}(x_n,\,y). \tag{1.2}$$

Из (1.1) следует, что $\{x_n\}$ ограничена, поэтому содержит слабо сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности, $x_n \xrightarrow{w} \hat{x}$.

Докажем, что $\hat{x} = \overline{x}$. Пусть $x \in X$. Так как $\mathcal{L}(\cdot,\,\overline{y})$ полунепрерывна снизу, то

$$\mathcal{L}(\hat{x},\,\overline{y}) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(x_n,\,\overline{y}).$$

Так как $\mathcal{L}(x_n,\,\cdot)$ вогнута, то

$$\mathcal{L}(x_n,\,\overline{y}) \leqslant \mathcal{L}(x_n,\,\overline{y}) + \mathcal{L}(x_n,\,y_n) - (1-\lambda_n)\mathcal{L}(x_n,\,\overline{y}) - \lambda_n\mathcal{L}(x_n,\,y) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_n\mathcal{L}(x_n,\,\overline{y}) - \lambda_n\mathcal{L}(x_n,\,y) + \mathcal{L}(x,\,y_n) \leqslant \lambda_n\mathcal{L}(x_n,\,\overline{y}) - \lambda_n\mathcal{L}(e_y,\,y) + \mathcal{L}(x,\,y_n),$$

так что

$$\mathcal{L}(x_n,\,\overline{y}) \leqslant -\frac{\lambda_n}{1-\lambda_n}\mathcal{L}(e_y,\,y) + \frac{1}{1-\lambda_n}\mathcal{L}(x,\,y_n).$$

Так как $-\mathcal{L}$ полунепрерывна снизу по второму аргументу, то отсюда и из предложения 2 получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \mathcal{L}(x_n,\,\overline{y}) \leqslant \mathcal{L}(x,\,\overline{y}).$$

Тем самым, $\mathcal{L}(\hat{x},\,\overline{y}) \leqslant \mathcal{L}(x,\,\overline{y})$ для любого $x \in X$. В силу единственности $e_{\overline{y}}$, $\hat{x} = \overline{x}$.

Проверим, что $\mathcal{L}(\overline{x},\,\overline{y}) \leqslant \mathcal{L}(\overline{x},\,y)$. В самом деле, в силу (1.2) и секвенциальной полунепрерывности снизу $\mathcal{L}(\cdot,\,y)$ относительно слабой топологии

$$\mathcal{L}(\overline{x},\,\overline{y}) = f(\overline{y}) \geqslant \varlimsup_{n\to\infty} \mathcal{L}(x_n,\,y) \geqslant \mathcal{L}(\overline{x},\,y).$$

□

2 Алгоритм Узавы.

Пусть H — гильбертово пространство, $a(u,\,v)$ — билинейная непрерывная форма, на H, удовлетворяющая неравенству

$$a(v,\,v) \geqslant \alpha\langle v,\,v\rangle, \quad \text{где } \alpha > 0. \tag{2.1}$$

Пусть $v \mapsto (f,\,v)$ — линейный непрерывный функционал,

$$J_0(v) = \frac{1}{2}a(v,\,v) - (f,\,v),$$

L — гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\,\cdot\rangle_L$, $\Phi : H \to L$, $\Lambda \subset L$ — выпуклое замкнутое множество. Предположим, что для любого $q \in L$ выполнено условие:

$$v \mapsto \langle q,\,\Phi(v)\rangle_L \text{ выпукла и полунепрерывна снизу на } H. \tag{2.2}$$

Рассматривается задача

$$\inf_{v\in H}\left[J_0(v) + \sup_{q\in\Lambda}\langle q,\,\Phi(v)\rangle_L\right]. \tag{2.3}$$

Пример. $H = \mathring{W}_2^1(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченное множество, $a(v,\,v) = \|v\|_H^2$, $f \in L_r(\Omega)$, $r > 1$, $(f,\,v) = \int\limits_\Omega f v\,dx$ (из теоремы вложения следует, что этот функционал непрерывен), $L = L_2(\Omega,\,\mathbb{R}^2)$, $\Phi v = \nabla v$,

$$\Lambda = \{q \in L : |q(x)| \leqslant \tau \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Тогда

$$\sup_{q\in\Lambda}\langle q,\,\Phi(v)\rangle_L = \tau\int\limits_\Omega |\nabla v|\,dx.$$

Введем функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(v,\,q) = J_0(v) + \langle q,\,\Phi(v)\rangle_L.$$

Предположим, что выполнены следующие условия:

1. функция $\mathcal{L}$ имеет седловую точку, то есть существуют такие $u \in H$, $p \in L$ такие, что
$$\mathcal{L}(u,\,q) \leqslant \mathcal{L}(u,\,p) \leqslant \mathcal{L}(v,\,p),\quad v \in H,\quad q \in \Lambda;$$
2. функция Φ удовлетворяет условию Липшица с константой C_1.

В частности, если M ограничено, то седловая точка существует по теореме 1.1.

Пусть P_Λ — оператор метрического проектирования на множество Λ (каждой точке из X сопоставляется ближайшая к ней из Λ). Так как пространство L гильбертово, а Λ выпукло и замкнуто, то элемент наилучшего приближения существует и единствен, и, кроме того, P_Λ липшицев с константой 1.

Пусть $(u,\,p) \in H \times L$ — седловая точка. Тогда

$$J_0(u) + \langle p,\,\Phi(u)\rangle_L \leqslant J_0(v) + \langle p,\,\Phi(v)\rangle_L,\quad v \in H, \tag{2.4}$$

$$\langle q - p,\,\Phi(u)\rangle \leqslant 0,\quad q \in \Lambda. \tag{2.5}$$

Последнее условие равносильно равенству

$$p = P_\Lambda(p + \rho\Phi(u)) \quad \text{для любого } \rho > 0. \tag{2.6}$$

В самом деле, в случае $\Phi(u) = 0$ оба условия выполнены. Рассмотрим случай $\Phi(u) \neq 0$. Пусть выполнено (2.5), то есть множество Λ содержится в полупространстве

$$E = \{q \in L : \langle q,\,\Phi(u)\rangle \leqslant \langle p,\,\Phi(u)\rangle\}.$$

Вектор $\Phi(u)$ ортогонален гиперплоскости

$$S := \{q \in L : \langle q,\, \Phi(u)\rangle = \langle p,\, \Phi(u)\rangle\}.$$

Значит, для любого $\rho > 0$ точка p является ближайшей к $p+\rho\Phi(u)$ в полупространстве E. Тем более, $p = P_\Lambda(p + \rho\Phi(u))$.

Обратно, пусть выполнено (2.6). Тогда внутренность шара B с центром в точке $p + \Phi(u)$ и радиусом $\|\Phi(u)\|_L$ не пересекается с Λ, поэтому B и L можно разделить гиперплоскостью. Она является опорной к B в точке p и, следовательно, совпадает с S. При этом, $\langle p + \Phi(u),\, \Phi(u)\rangle > \langle p,\, \Phi(u)\rangle$, откуда $\Lambda \subset E$.

На основании этого предлагается следующий алгоритм приближенного нахождения седловой точки (*алгоритм Узавы*).[2] Начинаем с произвольной точки $p^0 \in \Lambda$, по ней находим u^0, затем находим p^1, и т.д. Индукционный переход записывается следующим образом:

1. если найден элемент $p^n \in \Lambda$, находим $u^n \in H$ как точка минимума функционала $J_0(v) + \langle p^n,\, \Phi(v)\rangle_L$ (см. (2.4)).

2. полагаем $p^{n+1} = P_\Lambda(p^n + \rho_n\Phi(u^n))$ (см. (2.6)), где $\rho_n > 0$ — параметр, который позже будет подбираться.

Теорема 2.1. (о сходимости алгоритма Узавы). *Существуют такие* $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \infty$, *что при* $\rho_n \in (\alpha_0,\, \alpha_1)$ *выполнено*

$$u^n \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ по норме пространства } H. \tag{2.7}$$

Доказательство. Условие (2.4) эквивалентно

$$J_0'(u)[v - u] + \langle p,\, \Phi(v) - \Phi(u)\rangle_L \geqslant 0, \quad v \in H, \tag{2.8}$$

а условие на u^n —

$$J_0'(u^n)[v - u^n] + \langle p^n,\, \Phi(v) - \Phi(u^n)\rangle_L \geqslant 0, \quad v \in H. \tag{2.9}$$

В самом деле, $J_0'(u)[v - u] \leqslant J_0(v) - J_0(u)$ в силу выпуклости J_0, так что из (2.8) следует (2.4). Применяя теорему отделимости к множествам $\operatorname{epi} J_0$ и

$$\{(v,\, t) : t \leqslant J_0(u) - \langle p,\, \Phi(v) - \Phi(u)\rangle_L\},$$

получаем обратное утверждение. Эквивалентность (2.9) и условия на u^n доказывается аналогично.

Подставляем $v = u^n$ в (2.8), $v = u$ в (2.9), складываем эти неравенства и получаем

$$(J_0'(u^n) - J_0'(u))[u^n - u] + \langle p^n - p,\, \Phi(u^n) - \Phi(u)\rangle_L \leqslant 0.$$

Так как $a(u,\, v)$ билинейна, то отсюда следует, что

$$a(u^n - u,\, u^n - u) + \langle p^n - p,\, \Phi(u^n) - \Phi(u)\rangle_L \leqslant 0. \tag{2.10}$$

Обозначим $r^n = p^n - p$. Из (2.6) и определения p^{n+1} следует, что

$$r^{n+1} = P_\Lambda(p^n + \rho_n\Phi(u^n)) - P_\Lambda(p + \rho_n\Phi(u)).$$

[2] См. [1].

Поскольку отображение P_Λ липшицево с константой 1, получаем

$$\|r^{n+1}\|_L^2 \leqslant \|r^n+\rho_n(\Phi(u^n)-\Phi(u))\|_L^2 = \|r^n\|_L^2+2\rho_n\langle r^n,\, \Phi(u^n)-\Phi(u)\rangle_L+\rho_n^2\|\Phi(u^n)-\Phi(u)\|_L^2.$$

Воспользуемся неравенствами (2.10), (2.1) и тем, что Φ липшицево с константой C_1, и получим

$$\|r^{n+1}\|_L^2 \leqslant \|r^n\|_L^2 - 2\rho_n a(u^n-u,\, u^n-u) + C_1^2\rho_n^2\|u^n-u\|_L^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|r^n\|_L^2 - (2\alpha\rho_n - C_1^2\rho_n^2)\|u^n-u\|_L^2.$$

Выберем $\alpha_1 > \alpha_0 > 0$ так, чтобы $2\alpha\rho_n - C_1^2\rho_n^2 \geqslant \beta > 0$. Тогда

$$\|r^{n+1}\|_L^2 \leqslant \|r^n\|_L^2 - \beta\|u^n-u\|_L^2.$$

Значит, последовательность $\{\|r^n\|_L\}$ убывает и поэтому сходится. Отсюда

$$\|u^n-u\|_L^2 \leqslant \beta^{-1}\left(\|r^n\|_L^2 - \|r^{n+1}\|_L^2\right) \underset{n\to\infty}{\to 0}\,.$$

$\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер, *Численное исследование вариационных неравенств.* М.: Мир, 1979.

[2] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* М.: Мир, 1979.