Лекция 9-10. Теорема существования и единственности решения стационарного уравнения Навье – Стокса.

Мы докажем теорему существования и единственности обобщенного решения системы уравнений Навье – Стокса с нулевыми граничными условиями. Результаты принадлежат О.А. Ладыженской, доказательства следуют ее книге [1].

Сначала докажем два мультипликативных неравенства.

Лемма 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $f \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. *Тогда*

$$\|f\|^4_{L_4(\Omega)} \leqslant 4\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\|f_{x_1}\|_{L_2(\Omega)}\|f_{x_2}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\|f\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}. \tag{1}$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Достаточно рассмотреть $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Продолжим функцию f нулем вне Ω. Тогда

$$f^2(x_1,\, x_2) = 2\int\limits_{-\infty}^{x_1} f(t,\, x_2) f_{x_1}(t,\, x_2)\, dt,$$

$$f^2(x_1,\, x_2) = 2\int\limits_{-\infty}^{x_2} f(x_1,\, t) f_{x_2}(x_1,\, t)\, dt.$$

Поэтому

$$\max_{y_1} f^2(y_1,\, x_2) \leqslant 2\int\limits_{\mathbb{R}} |f_{x_1}(x_1,\, x_2) f(x_1,\, x_2)|\, dx_1,\ \ \max_{y_2} f^2(x_1,\, y_2) \leqslant 2\int\limits_{\mathbb{R}} |f_{x_2}(x_1,\, x_2) f(x_1,\, x_2)|\, dx_2. \tag{2}$$

Отсюда, в силу неравенства Коши – Буняковского, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} f^4(x)\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} \max_{y_1} f^2(y_1,\, x_2)\cdot \max_{y_2} f^2(x_1,\, y_2)\, dx_1\, dx_2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \max_{y_1} f^2(y_1,\, x_2)\, dx_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \max_{y_2} f^2(x_1,\, y_2)\, dx_1 \overset{(2)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 4\int\limits_{\mathbb{R}^2} |f_{x_1} f|\, dx \int\limits_{\mathbb{R}^2} |f_{x_2} f|\, dx \leqslant 4\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\|f_{x_1}\|_{L_2(\Omega)}\|f_{x_2}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Второе неравенство в (1) выполнено, поскольку $ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $f \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$. *Тогда*

$$\|f\|^4_{L_4(\Omega)} \leqslant 8\|f\|_{L_2(\Omega)}\|f_{x_1}\|_{L_2(\Omega)}\|f_{x_2}\|_{L_2(\Omega)}\|f_{x_3}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}\|f\|^3_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}.$$

Доказательство. Второе неравенство является следствием неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим $abc \leqslant \frac{1}{\sqrt{27}}(a^2+b^2+c^2)^{3/2}$.

Докажем первое неравенство. Снова можно считать, что $f \in C_0^\infty(\Omega)$ и $f|_{\mathbb{R}^2\setminus\Omega} = 0$. Применив (1) и неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f^4(x)\,dx \leqslant 4\int\limits_{\mathbb{R}} \|f(\cdot,\,x_3)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\|f_{x_1}(\cdot,\,x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\|f_{x_2}(\cdot,\,x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\,dx_3 \leqslant$$

$$\leqslant 4\max_{x_3}\|f(\cdot,\,x_3)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}\int\limits_{\mathbb{R}} \|f_{x_1}(\cdot,\,x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\|f_{x_2}(\cdot,\,x_3)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\,dx_3 \leqslant$$

$$\leqslant 4\left(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\max_{x_3}|f(x_1,\,x_2,\,x_3)|^2\,dx_1\,dx_2\right)\|f_{x_1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\|f_{x_2}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \overset{(2)}{\leqslant}$$

$$\leqslant 8\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}|f_{x_3}f|\,dx\right)\|f_{x_1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\|f_{x_2}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant 8\|f\|_{L_2(\Omega)}\prod_{k=1}^{3}\|f_{x_k}\|_{L_2(\Omega)}.$$

$\square$

Замечание. Если $f \in \mathring{W}_2^1(\Omega,\,\mathbb{R}^m)$, $f = (f_1,\,\ldots,\,f_m)$,

$$\|f\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{m} f_j^2(x)\,dx, \quad \|f\|^2_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{j,k=1}^{m}\left|\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)\right|^2\,dx,$$

то аналогично доказывается неравенство

$$\begin{gathered}\left(\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{j=1}^{m} f_j^2(x)\right)^2\,dx\right)^{1/4} \leqslant \\ \leqslant 8\|f\|_{L_2(\Omega)}\|f_{x_1}\|_{L_2(\Omega)}\|f_{x_2}\|_{L_2(\Omega)}\|f_{x_3}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{3/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}\|f\|^3_{\mathring{W}_2^1(\Omega)}.\end{gathered} \tag{3}$$

1 Теорема существования.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ограничена, Γ — граница Ω. Рассмотрим стационарную систему

$$\begin{cases} -\nu\Delta v_j + v_k\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + f_j(x), j = 1,\,2,\,3, \\ \operatorname{div} v = 0 \end{cases} \tag{4}$$

с краевыми условиями

$$v|_\Gamma = 0. \tag{5}$$

Сначала нужно задать класс функций $H(\Omega)$, в котором рассматриваются решения этой системы, и если он содержит функции, которые не являются достаточно гладкими, то определить понятие обобщенного решения. Требование к выбору класса состоит в том, чтобы для него выполнялась теорема существования и теорема единственности в малом (т.е. для областей достаточно малого размера).

Исходя из вида уравнений и граничных условий, класс $H(\Omega)$ естественно определить следующим образом.

Сначала рассмотрим пространство пробных функций

$$\mathring{J}(\Omega) = \{\varphi = (\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3) : \varphi_j \in C_0^\infty(\Omega),\ j = 1,\, 2,\, 3,\ \operatorname{div}\varphi = 0\}$$

с нормой из $\mathring{W}_2^1(\Omega,\, \mathbb{R}^3)$, т.е.

$$\|\varphi\|^2 = \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right)^2 dx.$$

Обозначим через $H(\Omega)$ пополнение $\mathring{J}(\Omega)$ по этой норме, $\langle \cdot,\, \cdot \rangle_H$ — скалярное произведение в пространстве $H(\Omega)$.

Теперь определим обобщенное решение системы уравнений Навье – Стокса.

Пусть сначала v является гладкой функцией и удовлетворяет (4), (5), $\varphi \in \mathring{J}(\Omega)$. Домножив (4) скалярно на $\varphi(x)$ и проинтегрировав по Ω, получаем

$$\int\limits_\Omega \left(-\nu \sum_{j=1}^3 \Delta v_j \cdot \varphi_j + \sum_{j,k=1}^3 v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \varphi_j\right) dx = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^3 f_j \cdot \varphi_j \, dx - \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^3 \varphi_j(x) \frac{\partial p}{\partial x_j}(x)\, dx. \tag{6}$$

Воспользовавшись формулой Стокса, граничными условиями (5) и равенствами $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{div}\varphi = 0$, получаем, что

$$0 = \int\limits_\Omega \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^3 \varphi_j \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)\right) dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\sum_{j=1}^3 \Delta v_j \cdot \varphi_j\right) dx + \int\limits_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right),$$

$$0 = \int\limits_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k v_j \varphi_j)\right) dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^3 v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \varphi_j + \sum_{j,k=1}^3 v_k v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right) dx,$$

$$0 = \int\limits_\Omega \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial (p\varphi_j)}{\partial x_j}\right) dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \left(p \operatorname{div}\varphi + \sum_{j=1}^3 \varphi_j \frac{\partial p}{\partial x_j}\right) dx = \int\limits_\Omega \left(\sum_{j=1}^3 \varphi_j \frac{\partial p}{\partial x_j}\right) dx.$$

Поэтому из (6) следует, что

$$\int\limits_\Omega \left(\nu \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \sum_{j,k=1}^3 v_k v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right) dx = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^3 f_j \varphi_j \, dx. \tag{7}$$

Скажем, что функция $v \in H(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (4) с краевыми условиями (5), если для любой функции $\varphi \in \mathring{J}(\Omega)$ выполнено (7).

Теорема 1. *Пусть функция f такова, что отображение*

$$\varphi \mapsto \int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} f_j(x)\varphi_j(x)\,dx$$

является линейным непрерывным функционалом в $\mathring{J}(\Omega)$. Тогда задача (4), (5) имеет хотя бы одно решение.

Теорема единственности в малом будет доказана в следующем параграфе.

Заметим, что из теорем вложения следует, что $\mathring{W}_2^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ для $q < 6$, поэтому если $f \in L_s(\Omega)$, $s > \frac{6}{5}$, то выполнены условия теоремы существования.

Также из теоремы вложения получается неравенство

$$\|v\|_{L_4(\Omega)} \leqslant C\|v\|_H. \tag{8}$$

Напомним, что частным случаем теоремы Лере – Шаудера является

Следствие 1. *Пусть X — банахово пространство, $A : X \to X$ — вполне непрерывное отображение. Пусть существует такое $R > 0$, что для любого $\lambda \in [0, 1]$ любое решение уравнения $x = \lambda Ax$ принадлежит шару радиуса R. Тогда уравнение $x = Ax$ имеет хотя бы одно решение в этом шаре.*

Кроме того, напомним

Предложение 1. *Пусть H — гильбертово пространство, $A : H \to H$ переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Тогда отображение A вполне непрерывно.*

Доказательство теоремы существования. Доказательство основывается на принципе Лере – Шаудера. Сначала мы перепишем условие (7) в виде операторного уравнения $v = Av$ в пространстве $H(\Omega)$, а затем проверим, что для него выполнены условия следствия 1.

Воспользуемся теоремой Рисса о виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Так как $\mathring{J}(\Omega)$ плотно в $H(\Omega)$, то из условий теоремы следует, что найдется функция $F \in H(\Omega)$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} f_j(x)\varphi_j(x)\,dx = \langle F, \varphi\rangle_{H(\Omega)}. \tag{9}$$

Теперь покажем, что линейный функционал

$$\varphi \mapsto \int\limits_{\Omega} \sum_{j,k=1}^{3} v_k(x)v_j(x)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}(x)\,dx$$

непрерывен в $H(\Omega)$. В самом деле, из неравенства Коши – Буняковского и теоремы вложения Соболева получаем

$$\left|\int\limits_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} v_k(x)v_j(x)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}(x)\,dx\right| \leqslant \|v\|^2_{L_4(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)} \overset{(8)}{\leqslant} C_1\|v\|^2_{H(\Omega)}\|\varphi\|_{H(\Omega)},$$

где C_1 не зависит от v и φ. Значит, по теореме Рисса, каждому элементу $v \in H(\Omega)$ можно сопоставить единственный элемент $A_0 v \in H(\Omega)$ такой, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} v_k(x) v_j(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x)\, dx = \langle A_0 v,\, \varphi \rangle_{H(\Omega)}.$$

Наконец,

$$\int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x)\, dx = \langle v,\, \varphi \rangle_{H(\Omega)}.$$

Таким образом, (7) переписывается в виде

$$\nu \langle v,\, \varphi \rangle_{H(\Omega)} - \langle A_0 v,\, \varphi \rangle_{H(\Omega)} = \langle F,\, \varphi \rangle_{H(\Omega)},\ \varphi \in \mathring{J}(\Omega).$$

В силу произвольности φ, получаем операторное уравнение

$$v = \frac{1}{\nu} \left(A_0 v + F \right). \tag{10}$$

Проверим условия теоремы Лере – Шаудера. Сначала покажем, что отображение A_0 вполне непрерывно. В силу предложения 1, достаточно проверить, что A_0 переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся. Мы воспользуемся тем, что пространство $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в пространство $L_4(\Omega)$ (здесь существенно использовалось то, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$; в случае $\mathbb{R}^4$ компактного вложения уже нет). Пусть $v^m = (v_1^m,\, v_2^m,\, v_3^m)$ слабо сходится в $H(\Omega)$ к $v = (v_1,\, v_2,\, v_3)$. Тогда, в силу компактности вложения, v^m сходится к v по норме $L_4(\Omega)$. Для любой функции $\varphi \in \mathring{J}(\Omega)$ выполнено

$$\langle A_0 v^m - A_0 v^n,\, \varphi \rangle_{H(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} (v_k^m(x) v_j^m(x) - v_k^n(x) v_j^n(x)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} (v_k^m(x) - v_k^n(x)) v_j^m(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x)\, dx + \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} v_k^n(x) (v_j^m(x) - v_j^n(x)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x)\, dx.$$

Применив два раза неравенство Коши – Буняковского и теорему вложения Соболева, получаем

$$\left| \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} (v_k^m(x) - v_k^n(x)) v_j^m(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_{H(\Omega)} \overset{(8)}{\leqslant} C_3 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{H(\Omega)} \|\varphi\|_{H(\Omega)},$$

где C_2, C_3 не зависят от v^m и φ. Аналогично

$$\left| \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} (v_j^m(x) - v_j^n(x)) v_k^n(x) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x)\, dx \right| \leqslant C_4 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)} \|v^n\|_{H(\Omega)} \|\varphi\|_{H(\Omega)}.$$

Взяв $\varphi = A_0 v^m - A_0 v^m$, получаем

$$\|A_0 v^m - A_0 v^n\|_{H(\Omega)}^2 \leqslant C_5 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)} (\|v^m\|_{H(\Omega)} + \|v^n\|_{H(\Omega)}) \|A_0 v^m - A_0 v^n\|_{H(\Omega)},$$

откуда

$$\|A_0 v^m - A_0 v^n\|_{H(\Omega)} \leqslant C_6 \|v^m - v^n\|_{L_4(\Omega)}$$

(т.к. слабо сходящаяся последовательность ограничена). Значит, по критерию Коши, $\{A_0 v^m\}$ сходится по норме $H(\Omega)$.

Из доказанного следует, что оператор $v \mapsto Av := \frac{1}{\nu}(A_0 v + F)$ также вполне непрерывен.

Осталось показать, что множество всех решений уравнений $v = \lambda A v$, $\lambda \in [0,\, 1]$, ограничено в $H(\Omega)$ (в этом месте будут использоваться граничные условия и равенство $\operatorname{div} v = 0$). Пусть

$$v - \mu(A_0 v + F) = 0,$$

где $\mu = \frac{\lambda}{\nu}$. Умножим это равенство скалярно на v в пространстве $H(\Omega)$:

$$\int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \left(\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x) \right)^2 - \mu v_k(x) v_j(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x) \right) dx = \mu \langle F,\, v\rangle_{H(\Omega)}.$$

Заметим, что интеграл от второго слагаемого равен 0. В самом деле[1],

$$\int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} v_k(x) v_j(x) \frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial(|v|^2)}{\partial x_k}(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(|v|^2 v_k)}{\partial x_k}(x)\, dx - \frac{1}{2} \int\limits_\Omega |v|^2(x) \operatorname{div} v(x)\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_\Gamma \sum_{k=1}^{3} |v|^2 v_k\, ds_k = 0,$$

так как $\operatorname{div} v = 0$ и $v|_\Gamma = 0$. Значит,

$$\int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}(x) \right)^2 dx = \mu \langle F,\, v\rangle_{H(\Omega)},$$

т.е.

$$\|v\|^2_{H(\Omega)} = \mu \langle F,\, v\rangle_{H(\Omega)} \leqslant \mu \|F\|_{H(\Omega)} \|v\|_{H(\Omega)},$$

откуда

$$\|v\|_{H(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\nu} \|F\|_{H(\Omega)}. \tag{11}$$

□

В случае неоднородных граничных условий также была доказана теорема существования обобщенного решения. Идея ее доказательства такая же, как в случае однородных граничных условий, но технически оно несколько сложнее.

2 Теорема единственности в малом.

Рассмотрим случай однородных граничных условий. Мы покажем, что при малых значениях обобщенного числа Рейнольдса (ниже поясним, что это означает) решение будет единственным. Тем самым, класс функций, в котором рассматриваются обобщенные решения, выбран удачно.

Рассмотрим неравенство Фридрихса для пространства $\mathring{W}_2^1(\Omega)$:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \hat{C} \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)},$$

[1] Выкладки, которые проведены ниже, проходят в случае $v \in \mathring{J}(\Omega)$. В общем случае равенство получается с помощью предельного перехода (**задача**).

где $\hat{C} = \hat{C}(\Omega)$ — наименьшая константа. Заметим, что $\hat{C}(\Omega) \to 0$ при $\operatorname{diam}\Omega \to 0$. Кроме того, из определения нормы в H и в $L_2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ следует, что для $u \in H$ выполнено неравенство Фридрихса с той же константой $\hat{C}$:

$$\|u\|_{L_2(\Omega,\mathbb{R}^3)} \leqslant \hat{C}\|u\|_H.$$

Обозначим через $\|f\|^*$ норму функционала $\varphi \mapsto \int\limits_\Omega \sum\limits_{j=1}^3 f_j(x)\varphi_j(x)\,dx$ в $H(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{3/4} \hat{C}(\Omega)^{1/2}\nu^{-2}\|f\|^* < 1. \tag{12}$$

Тогда уравнение (4) с граничными условиями (5) имеет единственное обобщенное решение.

Доказательство. Пусть v, $\tilde{v}$ — два обобщенных решения, $u = v - \tilde{v}$. Тогда $u \in H(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\int\limits_\Omega \left(\nu \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - u_k v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} - \tilde{v}_k u_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right) dx = 0, \quad \varphi \in H(\Omega).$$

Положив $\varphi = u$, отсюда получаем

$$0 = \nu\|u\|^2_{H(\Omega)} - \int\limits_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^3 u_k v_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \tilde{v}_k u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) dx = \nu\|u\|^2_{H(\Omega)} - \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^3 u_k v_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\,dx$$

(мы воспользовались тем, что $u|_\Gamma = 0$ и $\operatorname{div}\tilde{v} = 0$). Применив неравенство Гельдера, (3) и неравенство Фридрихса, получаем

$$\nu\|u\|^2_{H(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^3 u_k v_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega \left(\sum_{j=1}^3 v_j^2(x)\right)^2 dx\right)^{1/4} \left(\int\limits_\Omega \left(\sum_{k=1}^3 u_k^2(x)\right)^2 dx\right)^{1/4} \|u\|_{H(\Omega)} \overset{(3)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{3/4} \|u\|^{1/4}_{L_2(\Omega)}\|u\|^{3/4}_{H(\Omega)}\|v\|^{1/4}_{L_2(\Omega)}\|v\|^{3/4}_{H(\Omega)}\|u\|_{H(\Omega)} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{3/4} \hat{C}(\Omega)^{1/2}\|u\|^2_{H(\Omega)}\|v\|_{H(\Omega)}.$$

Воспользовавшись (11), получаем

$$\nu\|u\|^2_{H(\Omega)} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{3/4} \hat{C}(\Omega)^{1/2}\frac{1}{\nu}\|f\|^*\|u\|^2_{H(\Omega)}.$$

Поэтому если выполнено (12), то $u = 0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] О.А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М., Наука, 1970.