Лекция 5-6. Теорема вложения Соболева.

1 Пространства Соболева и их свойства.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область. Для $1 < p < \infty$ пространством Соболева $W_p^1(\Omega)$ называется множество функций

$$\left\{ f \in L_p(\Omega) \,\middle|\, \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_p(\Omega),\ j = \overline{1, d} \right\},$$

где производные понимаются в обобщенном смысле. Норма на этом пространстве задается формулой

$$\|f\|_{W_p^1(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \left(\sum_{j=1}^{d} \int\limits_{\Omega} |f_{x_j}(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Предложение 1. *Пространство Соболева является полным.*

Скажем, что $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, если существует функция $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ такая, что $f = \tilde{f}|_\Omega$; $f \in C^\infty(\Omega)$, если f бесконечно дифференцируема на (открытом) множестве Ω.

Область Ω называется областью с липшицевой границей, если для любого $x \in \partial\Omega$ найдется окрестность $U(x)$ и декартова система координат такие, что $U(x) \cap \partial\Omega$ в этой системе координат представляется в виде графика липшицевой функции.

Предложение 2. *Если Ω — ограниченная область, то множество $C^\infty(\Omega)$ плотно в $W_p^1(\Omega)$. Если Ω — ограниченная область с липшицевой границей, то множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W_p^1(\Omega)$.*

Доказательство этих утверждений будет приведено в Дополнении (первое из них простое; второе будет доказано в частном случае для областей, звездных относительно некоторого шара[1]).

Пространством $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ называется замыкание в $W_p^1(\Omega)$ множества $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно гладких функций с компактным носителем.

Сформулируем теорему вложения Соболева [1, 2].

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограничена.*

1. *если $p > d$, то $\mathring{W}_p^1(\Omega) \subset C(\Omega)$ и существует такое $M = M(p, d, \Omega)$, что*

$$\|f\|_{C(\Omega)} \leqslant M \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)},\ f \in \mathring{W}_p^1(\Omega).$$

При этом, оператор вложения является компактным;

[1] Общий случай сводится к этому с помощью гладкого разбиения единицы.

2. *если* $p \leqslant d$, $1 \leqslant q < \infty$ *и* $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$, *то* $\mathring{W}_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ *и существует такое* $M = M(p,\, q,\, d,\, \Omega)$, *что*

$$\|f\|_{L_q(\Omega)} \leqslant M\|\nabla f\|_{L_p(\Omega)},\ f \in \mathring{W}_p^1(\Omega).$$

   При этом, оператор вложения является компактным.

Эта теорема будет доказана в следующем параграфе.

Простым следствием теорем вложения является неравенство Фридрихса: если область Ω ограничена, то существует число $\tilde{M}(p,\, d,\, \Omega) > 0$ такое, что для любого $f \in \mathring{W}_p^1(\Omega)$ выполнено

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \tilde{M}(p,\, d,\, \Omega)\|\nabla f\|_{L_p(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Поэтому на пространстве $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|f\|_{\mathring{W}_p^1(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Подробнее о пространствах Соболева написано, например, в [1], [3]. В частности, там доказаны различные усиления и обобщения теорем вложения.

2 Доказательство теорем вложения Соболева.

Лемма 1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — *ограниченная область,* $l > 0$,

$$Tf(x) = \int\limits_\Omega |x-y|^{l-d} f(y)\, dy,\ x \in \Omega.$$

1. *Если* $\frac{l}{d} > \frac{1}{p}$, *то для любой функции* $f \in L_p(\Omega)$ *выполнено* $Tf \in C(\Omega)$ *и оператор* $T : L_p(\Omega) \to C(\Omega)$ *ограничен.*

2. *Если* $1 \leqslant q < \infty$, $\frac{l}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$, *то для любой функции* $f \in L_p(\Omega)$ *выполнено* $Tf \in L_q(\Omega)$ *и оператор* $T : L_p(\Omega) \to L_q(\Omega)$ *ограничен.*

Доказательство. Всюду будем считать, что функция f продолжена нулем вне Ω. Обозначим через R диаметр множества Ω. Из условия $f(y) \neq 0$ следует, что $y \in \Omega$, поэтому если $x \in \Omega$, то $|x - y| \leqslant R$.

Пусть $f \in C_0^\infty(\Omega)$. Покажем, что функция Tf непрерывна. В самом деле,

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |x-y|^{l-d} f(y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |z|^{l-d} f(x-z)\, dz = \int\limits_{B_R(0)} |z|^{l-d} f(x-z)\, dz,$$

$$|Tf(x) - Tf(x_0)| \leqslant \int\limits_{B_R(0)} |z|^{l-d} |f(x-z) - f(x_0 - z)|\, dz \leqslant$$

$$\leqslant c(d) \sup_{|z| \leqslant R} |f(x-z) - f(x_0-z)| \int\limits_0^R r^{l-1}\, dr \underset{x \to x_0}{\to} 0$$

в силу равномерной непрерывности функции f. Здесь $c(d)$ — положительная величина, зависящая только от d, возникающая при переходе к сферическим координатам.

Докажем первое утверждение. Из неравенства Гельдера следует, что для любого $x \in \Omega$

$$\left|\int\limits_{\Omega} |x-y|^{l-d} f(y)\,dy\right| \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |x-y|^{p'(l-d)}\,dy\right)^{1/p'} \|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{B_R(0)} |z|^{p'(l-d)}\,dz\right)^{1/p'} \|f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c(d)^{1/p'} \left(\int\limits_0^R r^{p'(l-d)+d-1}\,dr\right)^{1/p'} \|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Неравенство $\frac{l}{d} > \frac{1}{p}$ эквивалентно неравенству $p'(l-d)+d>0$, так что интеграл в правой части сходится.

Докажем второе утверждение. Без ограничения общности можно считать, что $p<q$. В самом деле, если $p \geqslant q$, то найдется такое $q_1 > p$, что $\frac{l}{d} + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p} > 0$. Так как $L_{q_1}(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ и это вложение непрерывно, то из $\|T\|_{L_p(\Omega)\to L_{q_1}(\Omega)} < \infty$ следует, что $\|T\|_{L_p(\Omega)\to L_q(\Omega)} < \infty$.

Пусть $l-d=a+b$ (числа a и b выберем позже). Из неравенства Гельдера следует, что

$$\left(\int\limits_{\Omega}\left|\int\limits_{\Omega} f(y)|x-y|^{l-d}\,dy\right|^q dx\right)^{1/q} \leqslant M_1 M_2,$$

где

$$M_1 = \sup_{x\in\Omega}\left(\int\limits_{\Omega} |x-y|^{bp'}\,dy\right)^{1/p'}, \quad M_2 = \left(\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega} |f(y)|^p |x-y|^{ap}\,dy\right)^{q/p} dx\right)^{1/q}.$$

Оценим M_1:

$$M_1^{p'} \leqslant \int\limits_{B_R(0)} |z|^{bp'}\,dz = c(d)\int\limits_0^R r^{bp'+d-1}\,dr < \infty,$$

если $bp'+d>0$, т.е.

$$a < l - \frac{d}{p}. \tag{2.1}$$

Оценим M_2. Пусть $\theta = \frac{q}{p}$. В силу неравенства Гельдера,

$$M_2 \leqslant \left(\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_{\Omega} |f(y)|^p|x-y|^{ap\theta}\,dy\right)^{\frac{q}{p\theta}}\left(\int\limits_{\Omega}|f(z)|^p\,dz\right)^{\frac{q}{p\theta'}} dx\right)^{1/q} =$$

$$= \|f\|_{L_p(\Omega)}^{\frac{1}{\theta'}}\left(\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}|f(y)|^p|x-y|^{ap\theta}\,dy\,dx\right)^{1/q} =$$

$$= \|f\|_{L_p(\Omega)}^{\frac{1}{\theta'}}\left(\int\limits_{\Omega}|f(y)|^p\int\limits_{\Omega}|x-y|^{ap\theta}\,dx\,dy\right)^{1/q} =: M_3.$$

Для любого $y \in \Omega$ выполнено

$$\int\limits_{\Omega} |x-y|^{ap\theta}\, dx \leqslant \int\limits_{B_R(0)} |z|^{ap\theta}\, dz = c(d) \int\limits_0^R r^{ap\theta+d-1}\, dr = C(a,\, d,\, p,\, q,\, R) < \infty,$$

если $ap\theta + d > 0$, то есть

$$a > -\frac{d}{q}. \tag{2.2}$$

В этом случае

$$M_3 \leqslant C^{\frac{1}{q}}(a,\, d,\, p,\, q,\, R) \left(\int\limits_{\Omega} |f(y)|^p\, dy \right)^{1/q} \|f\|^{1/\theta'}_{L_p(\Omega)} = C^{\frac{1}{q}}(a,\, d,\, p,\, q,\, R) \|f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Остается заметить, что существование числа a, удовлетворяющего (2.1) и (2.2), следует из условия $\frac{l}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. □

Замечание 1. Мы будем использовать эту лемму для $l = 1$.

Замечание 2. В [1] доказано, что при $1 < p < q < \infty$, $\frac{l}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = 0$ оператор $T : L_p(\mathbb{R}^d) \to L_q(\mathbb{R}^d)$ ограничен (теорема Адамса о потенциалах). Отсюда следует второе утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $K = [0,\, 1]^d$, $K' = [0,\, 1]^{d-1} \times \left[\frac{1}{2},\, 1\right]$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. *Тогда для каждой функции* $f \in W^1_p(K)$ *найдется константа* $a = a(f)$ *такая, что*

$$\|f - a\|_{L_q(K')} \leqslant C \|\nabla f\|_{L_p(K)}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Для каждого $z \in [0,\, 1]^{d-1} \times \{0\}$ положим $\varphi_z(t) = f((1-t)z + tx)$, $t \in [0,\, 1]$. Тогда

$$f(x) - f(z) = \varphi_z(1) - \varphi_z(0) = \int\limits_0^1 \frac{d\varphi_z(t)}{dt}\, dt = \int\limits_0^1 \langle \nabla f((1-t)z + tx),\, x - z \rangle\, dt. \tag{2.4}$$

Для $\zeta \in [0,\, 1]^{d-1}$ обозначим $z(\zeta) = (\zeta,\, 0)$. Проинтегрировав (2.4) по $\zeta \in [0,\, 1]^{d-1}$ и положив $a = \int\limits_{[0,\,1]^{d-1}} f(z(\zeta))\, d\zeta$, получаем

$$f(x) - a = \int\limits_{[0,\,1]^{d-1}} \int\limits_0^1 \langle \nabla f((1-t)z(\zeta) + tx), x - z(\zeta) \rangle\, dt\, d\zeta,$$

$$|f(x) - a| \leqslant \int\limits_{[0,\,1]^{d-1}} d\zeta \int\limits_0^1 |\nabla f((1-t)z(\zeta) + tx)| \cdot |x - z(\zeta)|\, dt.$$

Пусть $G_x = \{(1-t)z(\zeta) + tx :\ \zeta \in [0,\, 1]^{d-1},\, t \in [0,\, 1]\}$. Перейдем от повторного интеграла к кратному по множеству G_x, сделав замену переменных $y = (1-t)z(\zeta) + tx$. Определитель матрицы Якоби имеет вид

$$J = \begin{vmatrix} x^1 - \zeta^1 & 1-t & 0 & \dots & 0 \\ x^2 - \zeta^2 & 0 & 1-t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{d-1} - \zeta^{d-1} & 0 & 0 & \dots & 1-t \\ x^d & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как $x^d \geqslant \frac{1}{2}$ и $y - x = (1-t)(z-x)$, то

$$|J^{-1}| = (1-t)^{1-d}|x^d|^{-1} \leqslant 2\left(\frac{|y-x|}{|z-x|}\right)^{1-d}.$$

Наконец, $|x - z| \leqslant \sqrt{d}$, так что

$$|f(x) - a| \leqslant 2d^{\frac{d}{2}} \int\limits_{G_x} |\nabla f(y)| \cdot |x-y|^{1-d}\,dy \leqslant 2d^{\frac{d}{2}} \int\limits_{K} |\nabla f(y)| \cdot |x-y|^{1-d}\,dy.$$

Остается воспользоваться леммой 1. $\square$

Замечание 1. *Построенное отображение $f \mapsto a(f)$ линейно.*

Замечание 2. *Если $f|_{[0,\,1]^{d-1}\times\{0\}} = 0$ или $f|_{[0,\,1]^{d-1}\times\{1\}} = 0$, то в лемме 2 можно взять $a = 0$.*

Следствие 1.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $1 \leqslant q < \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Тогда $\mathring{W}^1_p(\Omega) \subset L_q(\Omega)$ и оператор вложения непрерывен. Если $p > d$, то $\mathring{W}^1_p(\Omega) \subset C(\Omega)$ и оператор вложения непрерывен.

Следующее утверждение усиливает лемму 2.

Лемма 3. *Пусть $K = [0,\,1]^d$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\frac{1}{d} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0$. Тогда для каждой функции $f \in W^1_p(K)$ найдется константа a такая, что*

$$\|f - a\|_{L_q(K)} \leqslant C\|\nabla f\|_{L_p(K)}.$$

Доказательство. Пусть $\psi : \mathbb{R} \to [0,\,1]$ — бесконечно дифференцируемая функция, $\psi|_{\left[0,\,\frac{1}{2}\right]} = 0$, $\psi|_{\left[\frac{3}{4},\,1\right]} = 1$. Положим $\varphi(x_1,\,\ldots,\,x_d) = \psi(x_d)$. Для функции f выберем константу $a = a(f)$ в соответствии с леммой 2. Пусть $K' = [0,\,1]^{d-1} \times \left[\frac{1}{2},\,1\right]$. Тогда (с учетом замечания 2 при оценке $\|(1-\varphi)(f-a)\|_{L_q(K)}$) получаем

$$\|f-a\|_{L_q(K)} \leqslant \|\varphi(f-a)\|_{L_q(K)} + \|(1-\varphi)(f-a)\|_{L_q(K)} \leqslant \|f-a\|_{L_q(K')} + \|(1-\varphi)(f-a)\|_{L_q(K)} \overset{(2.3)}{\leqslant}$$

$$\leqslant C\|\nabla f\|_{L_p(K)} + C\|\nabla[(1-\varphi)(f-a)]\|_{L_p(K)} \leqslant C_1\|\nabla f\|_{L_p(K)} + C\|(f-a)(\nabla\varphi)\|_{L_p(K)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1\|\nabla f\|_{L_p(K)} + C_2\|f-a\|_{L_p(K')} \overset{(2.3)}{\leqslant} C_3\|\nabla f\|_{L_p(K)}$$

(константы C, C_1, C_2, C_3 не зависят от f). $\square$

Пусть $E \subset \mathbb{R}^d$ измеримо. Обозначим $\operatorname{mes} E$ меру Лебега множества E.

Задача 1. Доказать, что если K — произвольный куб, то для любой функции $f \in \mathring{W}^1_p(K)$ найдется такая константа a, что

$$\|f - a\|_{L_q(K)} \leqslant C(\operatorname{mes} K)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|\nabla f\|_{L_p(K)}. \tag{2.5}$$

Напомним критерий предкомпактности Хаусдорфа. Пусть $(X,\,\rho)$ — метрическое пространство, $M \subset X$, $\varepsilon > 0$. Множество $\{x_1,\,\ldots,\,x_n\} \subset X$ называется ε-сетью для M, если для любого $x \in M$ найдется такое $i \in \{1,\,\ldots,\,n\}$, что $\rho(x,\,x_i) < \varepsilon$.

Критерий Хаусдорфа: $M \subset X$ предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечная ε-сеть для M.

Задача 2. Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$ — ограниченное множество. Показать, что M предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечномерное пространство $L \subset X$, что

$$\sup_{x\in M} \operatorname{dist}(x,\,L) \equiv \sup_{x\in M}\inf_{y\in L}\|x-y\| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $\frac{1}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p} > 0$. Тогда оператор вложения $\mathring{W}_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ компактен.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $p < q$. В этом случае выполнено неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

(это легко проверяется с помощью принципа Лагранжа; см., например, [4], задача 2.68).

Покажем, что множество $B = \{f \in C_0^\infty(\Omega) : \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant 1\}$ предкомпактно в $L_q(\Omega)$. Так как B ограничено, то достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечномерное пространство $L \subset L_q(\Omega)$ такое, что $\mathrm{dist}\,(f, L) < \varepsilon$ для любой функции $f \in B$.

Продолжив функции нулем вне Ω, можем считать, что $\Omega = K$ — куб. Разобьем K на n равных кубов K_j. В качестве L возьмем пространство функций, постоянных на K_j.

Для каждого j в силу (2.5) найдется такая константа a_j, что

$$\|f-a_j\|_{L_q(K_j)} \leqslant C(\mathrm{mes}\,K_j)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|\nabla f\|_{L_p(K_j)} = C\left(\frac{\mathrm{mes}\,K}{n}\right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|\nabla f\|_{L_p(K_j)}.$$

Обозначим через p_f кусочно-постоянную функцию, такую, что $p_f|_{K_j} = a_j$. Тогда

$$\|f-p_f\|_{L_q(K)} = \left(\sum_{j=1}^n \|f-a_j\|^q_{L_q(K_j)}\right)^{1/q} \overset{(2.6)}{\leqslant} \left(\sum_{j=1}^n \|f-a_j\|^p_{L_q(K_j)}\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\mathrm{mes}\,K}{n}\right)^{\frac{p}{d}+\frac{p}{q}-1}\|\nabla f\|^p_{L_p(K_j)}\right)^{1/p} =$$

$$= C\left(\frac{\mathrm{mes}\,K}{n}\right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|\nabla f\|_{L_p(K)} \leqslant C\left(\frac{\mathrm{mes}\,K}{n}\right)^{\frac{1}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Так как $\frac{1}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p} > 0$, то величина справа стремится к 0 при $n \to \infty$. □

Сделаем несколько заключительных замечаний о теоремах вложения для общих областей. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область. Скажем, что Ω удовлетворяет условию Джона, если найдутся константа $a > 0$ и точка $x_* \in \Omega$ такие, что для любого $x \in \Omega$ существует кривая $\gamma_x : [0, T(x)] \to \Omega$ со следующими свойствами:

1. $\gamma_x \in AC[0, T(x)]$, $|\dot{\gamma}_x| = 1$ п.в.,
2. $\gamma_x(0) = x$, $\gamma_x(T(x)) = x_*$,
3. для любого $t \in [0, T(x)]$ выполнено включение $B_{at}(\gamma_x(t)) \subset \Omega$.

В [5] было показано, что если область Ω удовлетворяет условию Джона, то при $\frac{1}{d}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p} > 0$ оператор вложения $W_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ ограничен. Более того, можно доказать, что это вложение компактно и выполнена такая же оценка скорости приближения кусочно-постоянными функциями, как и в случае куба. В работах О.В. Бесова были получены условия непрерывного и компактного вложения для нерегулярных областей, при этом они отличаются от условий вложения на “хороших” областях. В частности, для множества $K = \{(x_1, \ldots, x_{d-1}, x_d) = (x', x_d) : \ |x'|^{\frac{1}{\sigma}} < x_d < 1\}$, $\sigma > 1$, условие компактного вложения имеет вид $1 - [\sigma(d-1)+1]\max\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}, 0\right) > 0$ (см., например, [6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В.Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева.* Л.: Изд. ЛГУ, 1985.

[2] С.Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Изд. Ленингр. ун-та, 1950.

[3] Х. Трибель. *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.* М., Мир, 1980 г.

[4] В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тимхомиров, *Сборник задач по оптимизации.* М., Наука, 1984.

[5] Ю.Г. Решетняк, “Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей”, *Сиб. матем. журнал*, **21**:6 (1980), 108–116.

[6] О.В. Бесов, “Интегральные оценки дифференцируемых функций на нерегулярных областях”, *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 69–82.