Дополнение 1. Свойства пространств Соболева.

Некоторые обозначения: $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f; $B_R(0)$ — шар радиуса R с центром в нуле; $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — множество функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $f \in L_1(K)$ для любого компакта $K \subset \Omega$.

Предложение 1. *Пространство Соболева полно.*

Доказательство. Пусть $\{f_n\} \subset W_p^1(\Omega)$ — фундаментальная последовательность. Из определения нормы пространства $W_p^1(\Omega)$ следует, что последовательности $\{f_n\}$ и $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_j}\right\}$, $1 \leqslant j \leqslant d$, фундаментальны в $L_p(\Omega)$. Значит, $f_n \xrightarrow{L_p} f$ и $\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \xrightarrow{L_p} g_j$ при $n \to \infty$. Покажем, что $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$. В самом деле, пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega g_j \varphi\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \varphi\, dx = -\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx = -\int\limits_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, dx.$$

□

Пусть $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\omega \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\omega \subset B_1(0)$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega(x)\, dx = 1$. Положим $\omega_h(x) = \frac{1}{h^d}\omega\left(\frac{x}{h}\right)$, $h > 0$. Тогда $\operatorname{supp}\omega_h \subset B_h(0)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega_h(x)\, dx = \frac{1}{h^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega\left(\frac{x}{h}\right)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \omega(y)\, dy = 1. \tag{1}$$

Пусть $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Усреднением по Стеклову – Шварцу функции f называется функция

$$(\omega_h * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)\omega_h(x-y)\, dy \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\omega_h(y)\, dy.$$

Предложение 2. *Функция $\omega_h * f$ является бесконечно гладкой. Если обобщенная производная $\frac{\partial f}{\partial x^j} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$,*[1] *то $\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_h * f) = \omega_h * \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Тогда по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y) \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x-y)\, dy.$$

Отсюда по индукции выводится первое утверждение.

Докажем второе утверждение.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_h * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(y)\frac{\partial}{\partial x_j}\omega_h(x-y)\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-z)\frac{\partial}{\partial z_j}\omega_h(z)\, dz =$$

[1] От условия локальной интегрируемости можно отказаться, но для этого нужно ввести понятие свертки обобщенной функции с ω_h.

$$
= -\int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial z_j} f(x-z)\omega_h(z)\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial y^j} f(y)\omega_h(x-y)\,dy.
$$

$\square$

Далее считаем, что если функция f задана на области и интегрируема на любом ее ограниченном подмножестве, то она продолжена нулем на $\mathbb{R}^d$ и для нее определено $\omega_h * f$.

Усреднение по Стеклову – Шварцу позволяет аппроксимировать функции бесконечно гладкими.

Предложение 3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — область, $f \in C(\Omega)$ (или $f \in L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$), $\Omega_0 \subset \Omega$ — компактное подмножество. Тогда $\|\omega_h * f - f\|_{C(\Omega_0)} \to 0$ (соответственно $\|\omega_h * f - f\|_{L_p(\Omega_0)} \to 0$) при $h \to 0$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $C(\Omega)$. Положим

$$
\varepsilon(h) = \sup_{x\in\Omega_0} \sup_{y\in B_h(0)} |f(x-y) - f(x)|.
$$

В силу равномерной непрерывности f на Ω_0, $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to 0$. Значит, для любого $x \in \Omega_0$

$$
|\omega_h * f(x) - f(x)| \overset{(1)}{=} \left| \int\limits_{B_h(0)} \omega_h(y)(f(x-y) - f(x))\,dy \right| \leqslant \varepsilon(h) \int\limits_{B_h(0)} \omega_h(y)\,dy = \varepsilon(h).
$$

Пусть теперь $f \in L_p(\Omega)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\tilde{f} \in C(\Omega)$ такая, что $\|f - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$. Выберем $h > 0$ так, что $\|\omega_h * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{C(\Omega_0)} < \varepsilon$. Тогда

$$
\|\omega_h * f - f\|_{L_p(\Omega_0)} \leqslant \|\omega_h * (f - \tilde{f})\|_{L_p(\Omega_0)} + \|\omega_h * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega_0)} + \|f - \tilde{f}\|_{L_p(\Omega_0)} \leqslant
$$

$$
\leqslant \|\omega_h * (f - \tilde{f})\|_{L_p(\Omega_0)} + \varepsilon \operatorname{mes} \Omega_0 + \varepsilon.
$$

Остается показать, что существует величина $C(p,\,\omega) > 0$ такая, что для любой функции $g \in L_p(\Omega)$ при достаточно малых $h > 0$ выполнено

$$
\|\omega_h * g\|_{L_p(\Omega_0)} \leqslant C(p,\,\omega)\|g\|_{L_p(\Omega)}.
$$

Рассмотрим случай $p > 1$ (случай $p = 1$ рассматривается аналогично с небольшими изменениями). Если h достаточно мало, то $x - y \in \Omega$ для любых $x \in \Omega_0$, $y \in B_h(0)$. В силу неравенства Гельдера,

$$
\int\limits_{\Omega_0} |(\omega_h * g)(x)|^p\,dx = \int\limits_{\Omega_0} \left| \int\limits_{B_h(0)} g(x-y)\omega_h(y)\,dy \right|^p dx \leqslant
$$

$$
\leqslant \int\limits_{\Omega_0} \left(\int\limits_{B_h(0)} |g(x-y)|^p\,dy \right) \left(\int\limits_{B_h(0)} \omega_h^{p'}(z)\,dz \right)^{p-1} dx =
$$

$$
= \left(\int\limits_{B_h(0)} \int\limits_{\Omega_0} |g(x-y)|^p\,dx\,dy \right) \left(\int\limits_{B_h(0)} h^{-p'd} \left| \omega\left(\frac{z}{h}\right) \right|^{p'} dz \right)^{p-1} \leqslant
$$

$$\leqslant \operatorname{mes} B_1(0) h^d \|g\|^p_{L_p(\Omega)} h^{-pd} \left(h^d \int\limits_{B_1(0)} |\omega(y)|^{p'}\, dy \right)^{p-1} = \operatorname{mes} B_1(0) \|g\|^p_{L_p(\Omega)} \|\omega\|^p_{L_{p'}(\mathbb{R}^d)}.$$

$\square$

Область Ω называется звездной относительно множества $M \subset \Omega$, если $[x_0,\, x] \subset \Omega$ для любого $x_0 \in M$, $x \in \Omega$.

Задача. Показать, что если Ω звездна относительно $B_\delta(0)$ для некоторого $\delta > 0$, то $\overline{\Omega} = \bigcap\limits_{\lambda>1} (\lambda\Omega)$.

Теорема 1. *Если ограниченная область Ω является звездной относительно некоторого шара, то $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в $W^1_p(\Omega)$.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что Ω звездна относительно $B_\delta(0)$. Для $\lambda > 1$ обозначим $\Omega_\lambda = \lambda\Omega = \{\lambda x : x \in \Omega\}$. Тогда $\overline{\Omega} \subset \Omega_\lambda$. Пусть $f \in L_p(\Omega)$. Определим функцию $f_\lambda : \Omega_\lambda \to \mathbb{R}$ равенством $f_\lambda(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. Покажем, что

$$\|f_\lambda - f\|_{L_p(\Omega)} \to 0 \text{ при } \lambda \to 1. \tag{2}$$

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\tilde f \in C(\overline{\Omega})$ такая, что $\|f - \tilde f\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$. Из равномерной непрерывности $\tilde f$ следует, что $\|\tilde f_\lambda - \tilde f\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ при $\lambda \to 1$. Выберем λ так, чтобы $\|\tilde f_\lambda - \tilde f\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \varepsilon$. Наконец,

$$\int\limits_\Omega |f_\lambda(x) - \tilde f_\lambda(x)|^p\, dx = \int\limits_\Omega \left| f\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \tilde f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p dx =$$

$$= \lambda^d \int\limits_{\lambda^{-1}\Omega} |f(y) - \tilde f(y)|^p\, dy \leqslant \lambda^d \|f - \tilde f\|^p_{L_p(\Omega)}.$$

Значит,

$$\|f - f_\lambda\|_{L_p(\Omega)} \leqslant \|f - \tilde f\|_{L_p(\Omega)} + \|\tilde f - \tilde f_\lambda\|_{L_p(\Omega)} + \|\tilde f_\lambda - f_\lambda\|_{L_p(\Omega)} \leqslant (2 + \lambda^{d/p})\varepsilon.$$

Тем самым, (2) доказано.

Пусть $f \in W^1_p(\Omega)$. Тогда $\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}(x) = \lambda^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$. Значит, $\|f - f_\lambda\|_{W^1_p(\Omega)} \to 0$ при $\lambda \to 1$. Остается показать, что $\|f_\lambda - \omega_h * f_\lambda\|_{W^1_p(\Omega)} \to 0$ при $h \to 0$. В самом деле, в силу предложения 2, $\frac{\partial}{\partial x_j}(\omega_h * f) = \omega_h * \frac{\partial}{\partial x_j} f$, так что

$$\|f_\lambda - \omega_h * f_\lambda\|_{W^1_p(\Omega)} = \|f_\lambda - \omega_h * f_\lambda\|_{L_p(\Omega)} + \left(\sum_{j=1}^d \left\| \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} - \omega_h * \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} \right\|^p_{L_p(\Omega)} \right)^{1/p} \underset{h\to 0}{\to} 0$$

в силу предложения 3. $\square$