Лекция 7-8. Принцип Лере – Шаудера.

1 Формулировка теоремы.

Принцип Лере – Шаудера был доказан в работе [1] (см. также [2]). Этот топологический результат часто используется при доказательстве теорем существования решения уравнений математической физики.

Сначала введем необходимые понятия.

Пусть X, Y — банаховы пространства, $M \subset X$. Отображение $A : M \to Y$ называется вполне непрерывным, если оно непрерывно и переводит ограниченное множество в предкомпактное.

Если отображение A линейно и вполне непрерывно, то оно переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. В случае нелинейных отображений это, вообще говоря, неверно. Пусть $X = l_2$, $Y = \mathbb{R}$, $M = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — множество стандартных базисных векторов, $A(e_{2n}) = 0$, $A(e_{2n-1}) = 1$. Тогда A вполне непрерывно, $e_n \stackrel{w}{\to} 0$ при $n \to \infty$, но $\{A(e_n)\}$ не сходится.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно и для линейных отображений (например, тождественный оператор на l_1 некомпактен, но переводит слабо сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся). Однако если X рефлексивно, то оно выполнено.

Дадим определение рефлексивного пространства. Канонический оператор вложения $i : X \to X^{**}$ определяется равенством $\langle i(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$, $x^* \in X^*$. Банахово пространство X называется рефлексивным, если оператор i сюръективен. Примерами рефлексивных пространств являются $L_p(\Omega, \mu)$ и пространства Соболева $W^r_p(\Omega)$ при $1 < p < \infty$.

Следующую теорему сформулируем без доказательства.

Теорема 1. *Следующие условия равносильны:*

1. *X рефлексивно,*
2. *единичный шар в X слабо компактен,*
3. *из любой ограниченной последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Отметим, что для сепарабельного гильбертова пространства импликацию $1 \Rightarrow 3$ можно доказать, применяя канторовский диагональный процесс.

Предложение 1. *Пусть X — рефлексивное пространство, $A : X \to Y$ переводит слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Тогда отображение A вполне непрерывно.*

Доказательство. Непрерывность отображения A следует из того, что оно переводит сильно сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Предположим, что существует ограниченное множество M такое, что $A(M)$ не является компактным. Тогда существует последовательность $\{y_n\} \subset A(M)$ такая, что $\|y_m - y_n\| \geqslant r > 0$ для любых $m \neq n$. Пусть $y_n = A(x_n)$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а пространство X рефлексивно, то можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Тогда $\{y_{n_k}\}$ сильно сходится, что противоречит неравенству $\|y_{n_k} - y_{n_j}\| \geqslant r$ при $k \neq j$. □

Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$. Векторным полем на M называется непрерывное отображение $\Phi : M \to X$. Векторное поле называется вполне непрерывным, если оно представимо в виде суммы тождественного и вполне непрерывного отображений.

Пусть $U \subset X$ — открытое связное ограниченное множество, $\overline{U}$ — его замыкание. Вполне непрерывные векторные поля $I - A_0$, $I - A_1 : \overline{U} \to X$ называются гомотопными на $\overline{U}$, если существует вполне непрерывное отображение $A : \overline{U} \times [0,\, 1] \to X$ такое, что

1. $A(\cdot,\, 0) = A_0(\cdot)$, $A(\cdot,\, 1) = A_1(\cdot)$,
2. $x - A(x,\, \lambda) \neq 0$ для любых $\lambda \in [0,\, 1]$, $x \in \partial U$.

Отображение $A(\cdot,\, \cdot)$ называется невырожденной деформацией.

Для самой общей формулировки принципа Лере - Шаудера нужно понятие степени вполне непрерывного отображения. Оно будет позже дано только для гладкого отображения в конечномерном пространстве. В общем случае степень отображения определяется через аппроксимацию, и необходимо проверять корректность. Поэтому мы сформулируем частный случай теоремы Лере – Шаудера, который затем будет применяться.

Теорема 2. *Пусть X — банахово пространство, $\Phi_1 = I - A_1$ — вполне непрерывное векторное поле на X и существует такое $R > 0$, что векторные поля Φ_1 и I гомотопны на $B_R(0)$. Тогда существует $x \in B_R(0)$ такое, что $\Phi_1(x) = 0$. (То есть отображение A_1 имеет неподвижную точку в $B_R(0)$.)*

Эту теорему мы докажем, следуя книге [3].

Для выполнения условий принципа Лере – Шаудера достаточно построить вполне непрерывное отображение $A : X \times [0,\, 1] \to X$ со следующими свойствами: 1) $A(\cdot,\, 0) = 0$, $A(\cdot,\, 1) = A_1(\cdot)$ и 2) существует такое $R > 0$, что $x - A(\lambda,\, x) \neq 0$ для любого $\lambda \in [0,\, 1]$, $x \in S_R(0)$. Для выполнения условия 2) достаточно выполнения *априорной оценки* решения уравнения $x = A(\lambda,\, x)$: найдется такое $R > 0$, что для любого $\lambda \in [0,\, 1]$ все решения уравнения $x = A(\lambda,\, x)$ принадлежат открытому шару радиуса R.

В качестве невырожденной деформации часто используется отображение $A(x,\, \lambda) = \lambda A(x)$. Таким образом, получаем

Следствие 1. *Пусть X — банахово пространство, $A : X \to X$ — вполне непрерывное отображение. Пусть существует такое $R > 0$, что для любого $\lambda \in [0,\, 1]$ любое решение уравнения $x = \lambda A(x)$ принадлежит шару радиуса R. Тогда уравнение $x = A(x)$ имеет хотя бы одно решение в этом шаре.*

Для доказательства теоремы существования решения стационарной системы Навье – Стокса будет использоваться это следствие.

Пример применения принципа Лере – Шаудера: доказательство теоремы Брауэра. Теорема Брауэра утверждает, что непрерывное отображение f единичного шара в $\mathbb{R}^n$ в себя имеет неподвижную точку. Для доказательства продолжим отображение f до непрерывного отображения F на все $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$F(x) = f(cx)$, где $c = \min\left\{1, \frac{1}{\|x\|}\right\}$. Тогда для любого $\lambda \in [0, 1]$ решение уравнения $x = \lambda F(x)$ принадлежит единичному шару. Значит, отображение F имеет неподвижную точку x_* в единичном шаре. Так как $F(x_*) = f(x_*)$, то x_* — неподвижная точка для f.

2 Доказательство принципа Лере – Шаудера.

Мы начнем со случая, когда пространство конечномерно, а векторное поле гладкое.

Нам понадобится понятие степени отображения.

Пусть M, N — гладкие ориентируемые конечномерные многообразия с фиксированным ориентирующим атласом, M компактно, N связно, $f : M \to N$ — гладкое отображение. Точка $x_0 \in M$ называется *регулярной*, если матрица оператора $f'(x_0)$ имеет максимальный ранг. Точка $x_0 \in M$ называется *критической*, если x_0 не является регулярной. Точка $y_0 \in N$ называется *регулярным значением*, если все точки $x \in f^{-1}(y_0)$ являются регулярными (если $y_0 \notin f(M)$, то считаем, что y_0 также является регулярным значением). Легко видеть, что множество регулярных значений открыто. Точка $y_0 \in N$ называется *критическим значением*, если y_0 не является регулярным значением.

Теорема 3. *(теорема Сарда). Множество критических значений гладкого отображения имеет меру нуль.*[1] *В частности, множество регулярных значений всюду плотно в N.*

Эту теорему мы доказывать не будем. Заметим только, что если размерности M и N совпадают, то она сразу следует из формулы замены переменных под знаком интеграла.

Если размерности M и N совпадают, то прообразом регулярного значения является конечный набор точек, в окрестности которых f является диффеоморфизмом. Это следует из компактности M и теоремы об обратном отображении.

Предположим, что $\dim M = \dim N$, $x \in M$. Определим функцию $\operatorname{sgn} \det f'(x)$ следующим образом. Пусть точки x и $f(x)$ принадлежат соответственно картам $U_\alpha \subset M$ с локальными координатами (x^i_α) и $V_\beta \subset N$ с локальными координатами (y^j_β). В этих локальных координатах отображение f задается равенствами $y^j_\beta = f^j_{\alpha\beta}(x^i_\alpha)$. Положим

$$\operatorname{sgn} \det f'(x) = \operatorname{sgn} \det \left(\frac{\partial f^j_{\alpha\beta}(x_\alpha)}{\partial x^i_\alpha} \right)_{i,j}.$$

Определение корректно, так как атласы на M и N ориентирующие.

Пусть y_0 — регулярное значение f. *Степенью отображения* f по отношению к регулярному значению y_0 называется

$$\deg(f, y_0) = \sum_{x_i : f(x_i) = y_0} \operatorname{sgn} \det f'(x_i).$$

Если y находится в достаточно малой окрестности точки y_0, то $\deg(f, y) = \deg(f, y_0)$ (**упражнение:** провести подробное доказательство). Ниже будет показано, что степень отображения и глобально не зависит от выбора регулярного значения (даже если множество регулярных значений несвязно).

[1] Множество критических значений содержится в компакте $f(M)$; множество $f(M)$ можно покрыть конечным числом локальных карт, а в каждой карте множество меры нуль уже определяется стандартным образом.

Отображения f_0, $f_1 : M \to N$ называются *гладко гомотопными*, если существует гладкое отображение $F : M \times [0,\, 1] \to N$ такое, что $F(x,\, 0) = f_0(x)$, $F(x,\, 1) = f_1(x)$.

Введем на $M \times [0,\, 1]$ атлас, состоящий из произведений $U_\alpha \times [0,\, 1]$, где множества U_α принадлежат атласу на M. Аналогично определяется атлас на $N \times \Delta$, где Δ — произвольный отрезок.

Теорема 4. *Степень отображения не зависит от выбора регулярного значения y_0 и не меняется при гладких гомотопиях.*

Сначала нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Предложение 2. *Пусть M, N — гладкие n-мерные многообразия, M компактно, $F : M \times [0,\, 1] \to N$ — гладкое отображение, $f_0(x) = F(x,\, 0)$, $f_1(x) = F(x,\, 1)$. Пусть $y \in N$ — регулярное значение F, f_0 и f_1. Тогда $F^{-1}(y)$ является объединением следов гладких простых кривых. Для каждой из них возможны четыре случая:*

1. *оба конца кривой принадлежат $M \times \{0\}$;*
2. *оба конца кривой принадлежат $M \times \{1\}$;*
3. *один конец принадлежит $M \times \{0\}$, второй — $M \times \{1\}$;*
4. *кривая замкнута и ее след содержится в $M \times (0,\, 1)$.*

При этом, если кривая незамкнута, то $M \times (\{0\} \cup \{1\})$ содержит только ее концы.

В окрестности точки y выберем локальные координаты. Тогда можно считать, что в окрестности $F^{-1}(y)$ отображение F задается как вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^n$, $F(x,\, t) = (F^1(x,\, t),\, \ldots,\, F^n(x,\, t))$.

Предложение 3. *Пусть выполнены условия предложения 2, γ — связная компонента $F^{-1}(y)$, являющаяся следом незамкнутой кривой. Тогда существует ее окрестность U и диффеоморфизм $\varphi : U \to B_\varepsilon(y) \times [a,\, b]$, задаваемый равенством*

$$\varphi(x,\, t) = (F^1(x,\, t),\, \ldots,\, F^n(x,\, t),\, s(x,\, t)). \tag{2.1}$$

При этом, в случае 1 в окрестности концов кривой $s(x,\, t) = t + a$ и $s(x,\, t) = b - t$, в случае 2 $s(x,\, t) = 1 - t + a$ и $s(x,\, t) = b + t - 1$, в случае 3 $s(x,\, t) = t + a$ и $s(x,\, t) = b + t - 1$.

Доказательство этих двух технических утверждений вынесено в Дополнение 2.

Предложение 4. *Пусть y — регулярное значение f_0, f_1 и F. Тогда* $\deg(f_0,\, y) = \deg(f_1,\, y)$.

Доказательство. Так как y — регулярное значение f_0, f_1 и F, то $F^{-1}(y)$ — объединение конечного числа окружностей и дуг, причем дуги бывают трех типов (см. предложение 2).

Пусть γ — дуга, являющаяся связной компонентой $F^{-1}(y)$. Докажем следующие утверждения.

1. если $\gamma(a) = (x_0,\, 0)$, $\gamma(b) = (x_1,\, 0)$, то $\mathrm{sgn}\,\det f_0'(x_0) = -\mathrm{sgn}\,\det f_0'(x_1)$.
2. если $\gamma(a) = (x_0,\, 1)$, $\gamma(b) = (x_1,\, 1)$, то $\mathrm{sgn}\,\det f_1'(x_0) = -\mathrm{sgn}\,\det f_1'(x_1)$.
3. если $\gamma(a) = (x_0,\, 0)$, $\gamma(b) = (x_1,\, 1)$, то $\mathrm{sgn}\,\det f_0'(x_0) = \mathrm{sgn}\,\det f_1'(x_1)$.

Поскольку $f_i^{-1}(y)$ совпадает с множеством концов дуг, лежащих на $M \times \{i\}$, $i = 0,\, 1$, то отсюда следует равенство $\deg(f_0,\, y) = \deg(f_1,\, y)$.

Докажем первое утверждение (остальные доказываются аналогично). Из предложения 3 следует, что существует окрестность U дуги γ и диффеоморфизм $\Phi : U \to B_\varepsilon(y) \times [a,\, b]$, $\Phi(x,\, t) = (F(x,\, t),\, s(x,\, t))$. При этом, $s(x,\, t) = t + a$ в окрестности точки x_0 и $s(x,\, t) = b - t$ в окрестности точки x_1.

Так как на $M \times [0,\, 1]$ и $N \times \Delta$ выбраны ориентирующие атласы, то знак якобиана отображения Φ не зависит от карты и, значит, не зависит от точки на γ. Поэтому $\operatorname{sgn}\det \Phi'(x_0,\, 0) = \operatorname{sgn}\det \Phi'(x_1,\, 0)$. Далее, $\operatorname{sgn}\det \Phi'(x_0,\, 0) = \operatorname{sgn}\det F'_x(x_0,\, 0) = \operatorname{sgn}\det f'_0(x_0)$ и $\operatorname{sgn}\det \Phi'(x_1,\, 0) = -\operatorname{sgn}\det F'_x(x_1,\, 0) = -\operatorname{sgn}\det f'_0(x_1)$. Отсюда получаем, что $\operatorname{sgn}\det f'_0(x_0) = -\operatorname{sgn}\det f'_0(x_1)$. □

Следствие 2. *Если f_0, f_1 гладко гомотопны и y является регулярным значением f_0 и f_1, то* $\deg(f_0,\, y) = \deg(f_1,\, y)$.

Доказательство. Пусть y — регулярное значение отображения f_0. По теореме Сарда, множество регулярных значений отображений f_0, f_1 и F плотно в N и открыто. Поэтому в достаточно малой окрестности y существует точка y', являющаяся одновременно регулярным значением отображений f_0, f_1 и F и такая, что $\deg(f_0,\, y) = \deg(f_0,\, y')$, $\deg(f_1,\, y) = \deg(f_1,\, y')$. Из предложения 4 следует, что $\deg(f_0,\, y') = \deg(f_1,\, y')$. □

Доказательство теоремы 4. Пусть y_0, y_1 — регулярные значения f. Построим гладкое отображение $\varphi : N \times [0,\, 1] \to N$ такое, что $\varphi(\cdot,\, 0) = I$, $\varphi(y_0,\, 1) = y_1$ и $\varphi_t(\cdot) := \varphi(\cdot,\, t)$ для любого $t \in [0,\, 1]$ является диффеоморфизмом. Для этого соединим y_0 и y_1 гладкой несамопересекающейся кривой $\gamma : [0,\, 1] \to N$ ($\gamma(0) = y_0$, $\gamma(1) = y_1$), на ней зададим гладкое векторное поле $w(\gamma(t)) = \dot\gamma(t)$ и гладко его продолжим[2] на все многообразие N (при этом считаем, что это продолжение не равно нулю только в некоторой окрестности образа кривой); обозначим это продолжение через v. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot y = v(y)$ на N. Решение $y(t)$ этой системы существует при любых начальных условиях $y(0) = y$ и для любого $t \in \mathbb{R}$.[3] Положим $\varphi(y,\, t) = y(t)$. Тогда φ является однопараметрической группой диффеоморфизмов и если $y(0) = y_0$, то $y(t) = \gamma(t)$. Значит, φ является искомым.

Точка y_1 является регулярным значением отображения $\varphi_1 \circ f$. Так как $\operatorname{sgn}\det \varphi'_1(y_0) = \operatorname{sgn}\det \varphi'_0(y_0) = 1$, то $\deg(f,\, y_0) = \deg(\varphi_1 \circ f,\, y_1)$. Отображения f и $\varphi_1 \circ f$ гладко гомотопны, поэтому $\deg(f,\, y_1) = \deg(\varphi_1 \circ f,\, y_1)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Чтобы завершить доказательство второго утверждения теоремы, остается с помощью теоремы Сарда найти точку, являющуюся одновременно регулярным значением f_0 и f_1. □

[2]Идея доказательства существования гладкого продолжения состоит в следующем. Для каждого $t \in [0,\, 1]$ находим окрестность точки $\gamma(t)$ и локальные координаты, в которых векторное поле постоянно. Продолжаем его до постоянного векторного поля во всей окрестности. Выбираем конечное подпокрытие $\{U_i\}_{i=1}^k$ образа кривой такими окрестностями. Пусть v_i — векторное поле в U_i. Строим гладкое разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i=1}^k$, подчиненное этому покрытию, и полагаем $v(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) v_i(x)$, $x \in \cup_{i=1}^k U_i$. На все многообразие N это векторное поле продолжаем нулем.

[3]В самом деле, пусть решение продолжается на интервал $(0,\, t_*)$ и не продолжается на полуинтервал $(0,\, t_*]$. Тогда для любого $t \in [0,\, t_*)$ точки $y(t)$ принадлежат компакту $\cup_{i=1}^k \overline{U}_i$ (иначе $y(t) \equiv \mathrm{const}$, так как $v(y(t)) = 0$; см. сноску 1). Пусть $\{t_n\}$ — возрастающая последовательность, $t_n \underset{n\to\infty}{\to} t_*$. Из $\{y(t_n)\}$ выбираем подпоследовательность $\{y(t_{n_k})\}$, сходящуюся к точке y_*. Длина интервала, на который продолжается решение дифференциального уравнения, оценивается через константу Липшица функции $v(x)$. Значит, найдутся окрестность U точки y_* и $\delta > 0$ такие, что для любого $z \in U$ решение уравнения с начальными условиями в точке z продолжается на интервал $(0,\, \delta)$. Взяв $z = y(t_{n_k})$ для достаточно большого k, получаем противоречие.

Далее степень отображения будем обозначать $\deg f$.

Пусть $\xi : M \to \mathbb{R}^n$ — гладкое векторное поле на многообразии M, $\xi(x) \neq 0$ для любого $x \in M$. *Гауссовым отображением* называется $\Gamma_\xi : M \to S_1(0)$, $\Gamma_\xi(x) = \frac{\xi(x)}{|\xi(x)|}$. *Вращением* поля ξ на M называется степень отображения Γ_ξ.

Теорема 5. *Пусть $\xi : B_R(0) \to \mathbb{R}^n$ — гладкое векторное поле, $\xi(x) \neq 0$ при $x \in S_R(0)$. Пусть $\Gamma_\xi : S_R(0) \to S_1(0)$ — гауссово отображение для поля ξ на $S_R(0)$, $\deg \Gamma_\xi \neq 0$. Тогда $\xi(x) = 0$ для некоторого $x \in B_R(0)$.*

Отсюда будет следовать доказательство принципа Лере – Шаудера в гладком конечномерном случае: если векторное поле Φ гомотопно единичному, то его вращение на сфере совпадает с вращением тождественного векторного поля и поэтому не равно нулю. Значит, $\Phi(x) = 0$ для некоторого $x \in B_R(0)$.

Для доказательства теоремы 5 докажем утверждение об интеграле прообраза дифференциальной формы.

Пусть многообразия M, N имеют одинаковую размерность n, $f : M \to N$. Рассмотрим на N дифференциальную форму ω, которая в локальных координатах y_α имеет вид $\omega(y) = \varphi(y_\alpha)\, dy_\alpha^1 \wedge \dots \wedge dy_\alpha^n$. Тогда на M определена дифференциальная форма $f^*\omega(x) = \varphi(f(x))\, df_\alpha^1(x) \wedge \dots \wedge df_\alpha^n(x)$, где $f_\alpha^j(x)$ — j-я координата точки $f(x)$.

Теорема 6. *Выполнено равенство*

$$\int\limits_M f^*\omega = \deg f \int\limits_N \omega.$$

Сначала докажем

Предложение 5. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное открытое множество и для каждого $x \in \Omega$ задан шар U_x с центром в точке x, содержащийся в Ω. Тогда*

$$\Omega = \Lambda \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Omega_k \right),$$

где $\operatorname{mes} \Lambda = 0$, *$\Omega_k$ — открытые множества, содержащиеся в некотором U_{x_k}, $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть

$$W_m = \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x,\, \partial\Omega) \geqslant \frac{1}{m} \right\}.$$

Эти множества компактны, поэтому можно выбрать конечные покрытия $\{U_{x_{m,l}}\}_{l=1}^{l_m}$. Объединив эти семейства множеств по m, получим счетное покрытие Ω открытыми шарами U_{x_k}, $k \in \mathbb{N}$. Множества

$$\Lambda = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}_+} \bigcup_{l=1}^{l_m} \partial U_{x_{m,l}}, \quad \Omega_k = U_{x_k} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} \overline{U}_{x_j} \right)$$

являются искомыми. □

Доказательство теоремы 6. Воспользовавшись определением интеграла от дифференциальной формы с помощью разбиения единицы, без ограничения общности можем считать, что ω имеет носитель в одной карте U с локальными координатами

$(y_\beta^1, \ldots, y_\beta^n)$. Пусть $U = K \cup R$, где K — множество критических значений, R — множество регулярных значений. Из предложения 5 следует, что

$$R = \Lambda \sqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} U_k \right),$$

где $\operatorname{mes} \Lambda = 0$, а U_k — открытые множества такие, что

$$f^{-1}(U_k) = \bigsqcup_{j=1}^{r_k} V_{j,k},$$

$V_{j,k}$ содержится в одной локальной карте и $f|_{V_{j,k}}$ является диффеоморфизмом.

Выберем локальные координаты $(x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$ на $V_{j,k}$. Тогда для $x \in V_{j,k}$

$$f^*\omega(x) = \varphi(f(x))\, dy_\beta^1(x_\alpha) \wedge \cdots \wedge dy_\beta^n(x_\alpha) = \varphi(f(x)) \det \frac{\partial y_\beta(x)}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

Из теоремы о замене переменных под знаком интеграла получаем

$$\int\limits_{V_{j,k}} f^*\omega = \int\limits_{V_{j,k}} \varphi(f(x)) \det \frac{\partial y_\beta(x)}{\partial x_\alpha}\, dx_\alpha^1 \ldots dx_\alpha^n =$$

$$= \operatorname{sgn}\, \det f'|_{V_{j,k}} \int\limits_{U_k} \varphi(y)\, dy_\beta^1 \ldots dy_\beta^n = \operatorname{sgn}\, \det f'|_{V_{j,k}} \int\limits_{U_k} \omega.$$

Отсюда

$$\int\limits_{f^{-1}U_k} f^*\omega = \deg f \int\limits_{U_k} \omega,$$

так что

$$\int\limits_{f^{-1}R} f^*\omega = \deg f \int\limits_{R} \omega = \deg f \int\limits_{N} \omega$$

(мы воспользовались тем, что множества K, Λ и $f^{-1}(\Lambda)$ имеют меру нуль). Наконец, множество регулярных точек в $f^{-1}K$ также имеет меру нуль, а в критических точках $f^*\omega = 0$. Значит, $\int\limits_M f^*\omega = \int\limits_{f^{-1}R} f^*\omega$ и теорема доказана. □

Доказательство теоремы 5. Предположим обратное: $\xi(x) \neq 0$ для любого $x \in B_R(0)$. Тогда гауссово отображение Γ_ξ определено на всем шаре $B_R(0)$. Рассмотрим форму объема на $S_1(0)$:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x^i\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Тогда $d\Omega = n\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Из теоремы 6 и формулы Стокса получаем, что

$$0 \neq \deg \Gamma_\xi \int\limits_{B_1(0)} d\Omega = \deg \Gamma_\xi \int\limits_{S_1(0)} \Omega = \int\limits_{S_R(0)} \Gamma_\xi^* \Omega = \int\limits_{B_R(0)} d(\Gamma_\xi^* \Omega) = 0.$$

Последнее равенство верно, так как $\Gamma_\xi(B_R(0)) \subset S_1(0)$ и поэтому $\det \left(\frac{\partial \Gamma_\xi^i}{\partial x^j}(x) \right) = 0$. □

Итак, в конечномерном гладком случае принцип Лере – Шаудера доказан. Следующий шаг доказательства состоит в рассмотрении непрерывного векторного поля в конечномерном пространстве. Пусть $\xi : B_R(0) \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное векторное поле, гомотопное единичному, $F : B_R(0) \times [0,\, 1] \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, такое, что $F(x,\, 0) = \xi(x)$, $F(x,\, 1) = x$ и $F(x,\, t) \neq 0$ для любого $x \in S_R(0)$. Покажем, что найдется точка $x \in B_R(0)$ такая, что $\xi(x) = 0$.

Сначала рассмотрим случай, когда норма в $\mathbb{R}^n$ евклидова.

Предложение 6. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует гладкое отображение $F_\varepsilon : B_R(0) \times [0,\, 1] \to \mathbb{R}^n$ такое, что $\|F - F_\varepsilon\|_C < \varepsilon$ и $F_\varepsilon(x,\, 1) = x$.*

Доказательство. Возьмем малое $\delta > 0$ и положим для $(x,\, t) \in B_{R+\delta}(0) \times [-\delta,\, 1+\delta]$

$$\tilde{F}_\delta(x,\, t) = \begin{cases} \frac{R+\delta}{R} \cdot F\left(\frac{R}{R+\delta} x,\, t+\delta\right), \text{ если } -\delta \leqslant t \leqslant 1-\delta, \\ x, \text{ если } 1-\delta \leqslant t \leqslant 1+\delta. \end{cases}$$

Эту функцию мы сгладим с помощью усреднения по Стеклову – Шварцу (см. Дополнение 1). Пусть $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ — неотрицательная функция, такая, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x,\, t)\, dx\, dt = 1$ и $\operatorname{supp} \psi \subset B_1(0)$. Для каждого $h > 0$ положим $\psi_h(x,\, t) = \frac{1}{h^{n+1}} \psi\left(\frac{x}{h},\, \frac{t}{h}\right)$,

$$\tilde{F}_{\delta,h}(x,\, t) = x + \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \left(\tilde{F}_\delta(y,\, s) - y\right) \psi_h(x-y,\, t-s)\, dy\, ds, \quad (x,\, t) \in B_R(0) \times [0,\, 1].$$

Тогда $\tilde{F}_\delta \in C^\infty(B_R(0) \times [0,\, 1])$. Из равномерной непрерывности F следует, что при малых δ и h выполнено

$$\|F - \tilde{F}_{\delta,h}\|_{C(B_R(0) \times [0,\, 1])} < \varepsilon$$

(см. также Дополнение 1). Так как $\tilde{F}_\delta(x,\, t) - x = 0$ при $t \in (1-\delta,\, 1+\delta)$, то $\tilde{F}_{\delta,h}(x,\, 1) = x$ для малых h. □

Если ε достаточно мало, то $\xi_\varepsilon(x) = F_\varepsilon(x,\, 0)$ является гладким векторным полем, гладко гомотопным единичному. Поэтому при малых ε существует точка $x_\varepsilon \in B_R(0)$ такая, что $\xi_\varepsilon(x_\varepsilon) = 0$. Взяв сходящуюся последовательность, получаем точку $x \in B_R(0)$ такую, что $\xi(x) = 0$.

Рассмотрим случай произвольной нормы в $\mathbb{R}^n$. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — стандартный евклидов шар радиуса R. Определим $\varphi : D \to B_R(0)$ следующим образом. Если $x \in \partial D$, то положим $\varphi(x) = \lambda(x) x$, где $\lambda(x) > 0$, $\|\lambda(x) x\| = R$. Если $x = cx'$, $x' \in \partial D$, $c \in [0,\, 1]$, то $\varphi(x) := c\varphi(x')$.

Задача. Доказать, что это отображение является гомеоморфизмом D и $B_R(0)$.

Положим $\tilde{F}(x,\, t) = F(\varphi(x),\, t)$, $x \in D$, $t \in [0,\, 1]$. В силу доказанного, найдется точка $x \in D$ такая, что $\xi(\varphi(x)) = 0$. Значит, $\xi(y) = 0$ для некоторого $y \in B_R(0)$.

Теперь рассмотрим бесконечномерный случай. Пусть $n \in \mathbb{N}$, X_n — конечномерные подпространства, $A_1^n : B_R(0) \to X_n$ — непрерывные отображения, $\|A_1^n - A_1\|_{C(B_R(0))} \to 0$ при $n \to \infty$, $x_n \in B_R(0)$, $A_1^n(x_n) = x_n$. Тогда существует $x \in B_R(0)$ такое, что $x = A_1(x)$. В самом деле, так как отображение A_1 вполне непрерывно, то $\{A_1(x_n)\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности можно считать, что $A_1(x_n) \to y$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\|x_n - y\| = \|A_1^n(x_n) - y\| \leqslant \|A_1(x_n) - y\| + \|A_1^n(x_n) - A_1(x_n)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Отсюда, воспользовавшись непрерывностью A_1, получаем

$$\|y - A_1(y)\| \leqslant \|y - A_1(x_n)\| + \|A_1(x_n) - A_1(y)\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Значит, $A_1^n(y) = y$.

Итак, нужно построить последовательность отображений A_1^n. Пусть A — гомотопия между $I - A_1$ и I, $X_n \subset X$ — подпространство, натянутое на конечную n^{-1}-сеть множества $A(B_R(0) \times [0,\, 1])$, которую обозначим $\{y_i\}_{i=1}^m$. Положим

$$P_n(\xi) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} y_i f_i(\xi)}{\sum\limits_{i=1}^{m} f_i(\xi)},$$

где

$$f_i(\xi) = \begin{cases} 2n^{-1} - \|\xi - y_i\|, \text{ если } \|\xi - y_i\| < 2n^{-1}, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Отображение P_n корректно определено (так как $\|\xi - y_i\| \leqslant n^{-1}$ для некоторого i) и непрерывно.

Положим $A^n(x,\, t) = P_n \circ A(x,\, t)$, $A_1^n(x) = P_n \circ A_1(x)$. Покажем, что

- $\|A^n - A\|_{C(B_R(0)\times[0,\,1])} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (а значит, $\|A_1^n - A_1\|_{C(B_R(0))} \underset{n\to\infty}{\to} 0$),
- $I - A_1^n$ гомотопно тождественному на подпространстве X_n при достаточно больших n (тогда ограничение A_1^n на X_n имеет неподвижную точку).

В самом деле, пусть $J(x) = \{i = \overline{1,\, m} : \|A(x,\, t) - y_i\| \leqslant 2n^{-1}\}$. Тогда

$$\|A^n(x,\, t) - A(x,\, t)\| = \|P_n(A(x,\, t)) - A(x,\, t)\| \leqslant \frac{\sum\limits_{i\in J(x)} \|y_i - A(x,\, t)\| f_i(A(x,\, t))}{\sum\limits_{i\in J(x)} f_i(A(x,\, t))} \leqslant 2n^{-1}.$$

Докажем второе утверждение. Покажем, что при достаточно больших n выполнено $x - A^n(x,\, t) \neq 0$ для любого $x \in S_R(0)$, $t \in [0,\, 1]$. Для этого достаточно проверить, что

$$\|x - A(x,\, t)\| \geqslant \alpha > 0, \quad x \in S_R(0), \quad t \in [0,\, 1].$$

Предположим обратное: $x_n - A(x_n,\, t_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Можно считать, что $t_n \to t$ и $A(x_n,\, t_n) \to y$, $n \to \infty$. Тогда $x_n \to y$, $n \to \infty$. Из непрерывности A получаем, что $A(x_n,\, t_n) \to A(y,\, t)$, $n \to \infty$, так что $y = A(y,\, t)$ — противоречие. Тем самым, $I - A_1^n$ гомотопно отображению $A^n(x,\, 0) = x - P_n(0)$ (напомним, что $A(x,\, 0) = 0$). Нетрудно видеть, что $A^n(\cdot,\, 0)$ гомотопно тождественному при достаточно больших n (достаточно рассмотреть отображение $x \mapsto x - \lambda P_n(0)$, $\lambda \in [0,\, 1]$). Остается заметить, что гомотопия отображений является отношением эквивалентности и, в частности, транзитивна.

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. Leray, J. Schauder, “Topologie et equations fonctionelles”. Ann. Sci. École Norm. Sup. 13 (1934), pp. 45–78.

[2] М.А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* Гостехиздат, 1956.

[3] Е.В. Троицкий, *Степень отображения и ее применения. Учебное пособие по курсу “Прикладные проблемы геометрии”.* М., 1996.