Закон подобия для системы Навье-Стокса

Рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x^i} + \nu \Delta v^i\,, \\ \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

(напомним, что μ – кинематическая вязкость, её размерность $[\nu] = \frac{L^2}{T}$). Пусть поток жидкости со скоростью U на бесконечности обтекает тело размера L

Перейдём к безразмерным координатам

$$x^i = L\xi^i, \quad t = \frac{L}{T}\tau, \quad p = \varrho U^2 P, \quad v^i = U u^i. \quad \text{Имеем}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^i}{\partial \tau} + u^\alpha \frac{\partial u^i}{\partial \xi^\alpha} &= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial \xi^i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u^i}{(\partial \xi^\alpha)^2}\,, \\ \frac{\partial u^\alpha}{\partial \xi^\alpha} &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Величина $Re = \frac{\varrho U L}{\eta}$ в этом уравнении называется числом Рейнольдса. Два течения называются подобными, если в безразмерных координатах они описываются одинаковыми уравнениями, в частности, у них **одинаковые числа Рейнольдса**. Это имеет принципиальное значение для численного моделирования реальных течений.

Для потоков, с которыми приходится иметь дело при таком моделировании, числа Re велики, а коэффициенты $\frac{1}{Re}$ малы. Поэтому, например, значительный интерес представляет модель идеальной несжимаемой жидкости, когда $Re = \infty$ (система уравнений Эйлера). На примерах мы увидим, что решение системы уравнений Эйлера существенно отличается от решений системы Навье-Стокса в малой окрестности обтекаемого тела. Более того, при $Re > Re_{\text{кр.}}$ (критический $Re \sim 2500$) течение перестаёт быть ламинарным (гладким) и становится турбулентным.

Плоское течение вблизи критической точки (точки останова).

Система уравнений Навье-Стокса для стационарного $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ плоского течения

$$v^1 = u(x,y), \quad v^2 = v(x,y), \quad v^3 = 0$$

имеет вид:

$$\begin{aligned} u u_x + v u_y &= -\frac{1}{\varrho} p_x + \nu \Delta u\,, \\ u v_x + v v_y &= -\frac{1}{\varrho} p_y + \nu \Delta v\,, \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

(см. [1]). Жидкость перемещается из бесконечности к стенке, поставленной поперек течения, и далее двигается вдоль этой стенки в противоположные стороны от критической точки $\mathcal{O}$ (точки останова). Положим в (1) $\nu = 0$ (система Эйлера). Тогда в качестве решения системы (1) можно выбрать

$$U = a \cdot x\,, \quad V = -a \cdot y\,, \quad a = \text{ const } > 0$$

– составляющие скорости потенциального течения (без трения). Давление для такого течения определится из уравнения Бернулли:

$$P_0 - P = \frac{\varrho}{2}(U^2 + V^2) = \frac{\varrho a^2}{2}(x^2 + y^2)\,. \tag{4}$$

Принимая во внимание явный вид этого решения, попробуем искать решение (1) в вязком случае в виде

$$u = x \cdot f'(y)\,, \quad v = -f(y)\,, \quad p_0 - p = \frac{\varrho a^2}{2}(x^2 + F(y)) \tag{5}$$

(p_0 – давление в точке $\mathcal{O}$). Подставляя u, v, p в систему (3), получим

$$
\begin{aligned}
(f')^2 - f\cdot f'' &= a^2 + \nu f''' \,, \\
f\cdot f' &= \frac{a^2}{2}F' - \nu f''
\end{aligned}
\tag{6}
$$

при условиях

$$
\begin{aligned}
&u\big|_{y=0} = v\big|_{y=0} = 0\,, \quad u(x,y)\big|_{y=\infty} = U = a\cdot x\,, \\
&f\big|_{y=0} = f'\big|_{y=0} = 0\,, \quad f'\big|_{y=\infty} = a\,, \quad f\big|_{y=0} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Система распадается, сначала находят f (и определяют неизвестные u, v), затем F (для определения давления).

Сделаем аффинное преобразование преобразование

$$\eta = \alpha y\,, \quad f(y) = A\varphi(\eta) \tag{8}$$

Подставляя в (6), получим:

$$\alpha^2 A^2(\varphi'^{\,2} - \varphi\varphi'') = a^2 + \nu A\alpha^3\varphi'''$$

(здесь $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\eta}$). Выберем α и A так, чтобы

$$\alpha^2A^2 = a^2\,, \quad \nu\alpha^3 A = a^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\nu a}\,,\ \alpha = \sqrt{\frac{a}{\nu}}\,,$$

$$\eta = \sqrt{\frac{a}{\nu}}\,y\,, \quad f(y) = \sqrt{\nu a}\,\varphi(\eta)\,, \quad \text{где}$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi''' + \varphi\cdot\varphi'' - (\varphi')^2 + 1 = 0\,, \\
&\varphi(0) = \varphi'(0) = 0\,, \quad \varphi'(\infty) = 1\,.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Список литературы

[1] Г. Шлихтинг, *Теория пограничного слоя*, "Наука", Москва, (1974).