Тензор скоростей деформации.

Чтобы замкнуть систему пяти дифференциальных уравнений, состоящую из законов сохранения, делают различные предположения о свойствах сплошной среды.

Пусть за время dt вектор $\bar{\varrho} = \overline{OM}$ сплошной среды перешёл в $\bar{\varrho}' = \overline{O'M'}$. Если зафиксировать начало координат A и обозначить вектор $\overline{AO} = \bar{r}_0$, то

для точки M': $\overline{AM'} = \bar{\varrho} + \bar{v}(\bar{r}_0 + \bar{\varrho})\,dt$,

для точки O': $\overline{AO'} = \bar{v}(\bar{r}_0)\,dt$. Поэтому

$$d\bar{\varrho} = \bar{\varrho}' - \bar{\varrho} = \bar{v}(\bar{r}_0 + \bar{\varrho})\,dt - \bar{v}(\bar{r}_0)\,dt = (\bar{\varrho}, \nabla)\bar{v}\,dt := \varrho^\alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^\alpha}\,dt.$$

Пусть $\bar{\varrho} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$,

$$d\xi^i = \xi^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha}\,dt = \xi^\alpha \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i}\right)\,dt + \xi^\alpha \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i}\right)\,dt.$$

Введём тензор

$$\varepsilon^{i\alpha} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i}).$$

Тогда

$$d\xi^i = (\xi^\alpha \varepsilon^{i\alpha} + [\,\overline{\Omega}, \bar{\varrho}\,]^i)\,dt\,, \tag{1}$$

$\overline{\Omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{v}$ – вихрь,

$$[\,\overline{\Omega}, \bar{\varrho}\,]^i\,dt = \xi^\alpha \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i}\right)\,dt\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Если имеется *абсолютно твёрдое тело*, то

$$d\bar{\varrho} = [\,\overline{\Omega}, \bar{\varrho}\,]\,dt\,,$$

т.е. за время dt вектор $\bar{\varrho}$ повернулся на $d\bar{\varrho}$ (здесь $\overline{\Omega}$ – угловая скорость вращения в точке O). Первое же слагаемое $\xi^\alpha \varepsilon^{i\alpha}$ в (1) указывает, что тело является не абсолютно твёрдым, а деформируемым.

Определение. Тензор

$$\varepsilon^{i\alpha} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^i})$$

называют тензором скоростей деформации.

Физический смысл тензора $\varepsilon^{i\alpha}$.

Рассмотрим сначала физический смысл диагональных элементов, например, элемента $\varepsilon^{11} = \frac{\partial v^1}{\partial x^1}$. Для этого представим одномерный стержень в направлении x_1.

За единицу времени единица длины изменяется на величину $\frac{\partial v^1}{\partial x^1}$ в направлении x_1.

Рассмотрим теперь элемент ε^{12}.

За время dt прямоугольник $dx^1 \times dx^2$ перешёл в параллелограмм, прямой угол изменился на величину $\left(\frac{\partial v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial v^2}{\partial x^1}\right)dt$. Таким образом, диагональные члены ($i = j$) тензора ε^{ij} скоростей деформации отвечают за скорость растяжения линейных элементов среды в направлении i, а остальные его элементы ($i \neq j$) – за скорость скашивания плоских элементов среды в плоскости (i, j).

Проблема замыкания системы уравнений, состоящей из законов сохранения.

Рассмотрим систему:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{– неразрывность среды,} \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\varrho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v^i v^\alpha - \sigma^{i\alpha})}{\partial x^\alpha} = f^i \quad \text{– сохранение количества движения,} \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\varrho \cdot \left(E + \frac{v^2}{2}\right))}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \cdot \left(E + \frac{v^2}{2}\right)v^\alpha)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial(-\sigma^{\alpha\beta} v^\beta)}{\partial x^\alpha} = 0 \quad \text{– сохранение энергии.} \tag{4}$$

Общее число уравнений этой системы – 5, а входящих в неё неизвестных – 14:

$$\varrho\,,\; v^1\,,\; v^2\,,\; v^3\,,\; \sigma^{11}\,,\; \sigma^{12}\,,\; \sigma^{13}\,,\; \sigma^{21}\,,\; \sigma^{22}\,,\; \sigma^{23}\,,\; \sigma^{31}\,,\; \sigma^{32}\,,\; \sigma^{33}\,,\; E.$$

Величина $(\sigma^{11}+\sigma^{22}+\sigma^{33})$ является инвариантом тензора σ^{ij}; это позволяет ввести понятие давления:

$$p=-\frac{\sigma^{11}+\sigma^{22}+\sigma^{33}}{3}$$

(знак минус выбирается потому, что давление действует извне, со стороны сплошной среды на выделенный объём). Тензор напряжения представим в виде суммы

$$\sigma^{i\alpha}=-p\delta^{i\alpha}+\tau^{i\alpha},$$

где $\tau^{i\alpha}$ – тензор касательных напряжений.

Давление действует со всех сторон одинаково, не меняя формы выделенного объёма, а лишь меняя его размеры.

Все модели сплошной среды связаны с теми или иными предположениями о свойствах среды. Если среда деформируется быстро (пример – стальной шарик, ударившийся о пол), то будем говорить, что среда деформируется упруго, не изменяя формы. Если же среда деформируется медленно, скажем, что среда деформируется вязким образом, изменяет форму.

Введём характерные параметры среды.

Время, за которое среда принимает форму сосуда, называется характерным временем или *временем релаксации* Θ. Введём *характерное напряжение* σ_0. Из материала среды сделаем однородный изотропный стержень. Характерным напряжением σ_0 назовём силу, приложение которой к единице поперечного сечения стержня, приводит к растяжению стержня на, скажем, 10% (или другое количество процентов, задаваемое ГОСТом для данного материала).

Пример: стекло – это жидкость, время релаксации которой $\Theta\sim 1000$ лет.

Итак, среда характеризуется временем релаксации Θ и напряжением σ_0. Проведём следующий опыт. К стандартному кубику, вырезанному из испытуемого материала среды, приложим силу внешнего воздействия:

Через время dt кубик превратился в параллелепипед (на рисунке кубик ∞-го размера по направлению, перпендикулярному плоскости рисунка). Скорость деформации характеризует скорость изменения угла γ:

$$\frac{d\gamma}{dt}=\dot\gamma,\quad [\,\dot\gamma\,]=\frac{1}{T}$$

– размерность скорости деформации,

$$[\,\Theta\cdot\dot\gamma\,]=1$$

– безразмерная скорость деформации. Она зависит от напряжения внешнего воздействия, от скорости, с которой деформация прилагается (удар или медленное воздействие) и характеристик материала Θ, σ_0

$$\dot\gamma=f(\sigma,\frac{d\sigma}{dt},\Theta,\sigma_0).$$

Применим π-теорему. В безразмерной форме

$$\Theta\cdot\dot\gamma=F\left(\frac{\sigma}{\sigma_0},\frac{\dot\sigma\Theta}{\sigma_0}\right).$$

Рассмотрим случай *вязких* тел. В этом случае $\dot\sigma$ мало (точнее $\dot\sigma\Theta\ll\sigma_0$) и

$$\Theta\cdot\dot\gamma=F\big(\frac{\sigma}{\sigma_0}\big)=F(0)+F'(0)\frac{\sigma}{\sigma_0}+\dots\ .$$

Заметим, что $F(0)=0$, т.к. при отсутствии напряжений нет изменения формы среды, т.е. $\dot\gamma=0$. Ограничиваясь линейным приближением, получаем

$$\sigma=\eta\cdot\dot\gamma,\quad \text{где}\quad \eta=\frac{\Theta\cdot\sigma_0}{F'(0)}$$

– коэффициент вязкости (линейно вязкое тело).

Рассмотрим теперь другой случай, когда нагрузки малые, но быстрые (т.е. $\sigma \ll \sigma_0$). Тогда

$$\Theta \cdot \dot{\gamma} = F\left(\frac{\dot{\sigma}\Theta}{\sigma_0}\right)$$

и линейное приближение даёт

$$\Theta \cdot \dot{\gamma} = A\frac{\dot{\sigma}\Theta}{\sigma_0}\,.$$

Интегрируя, получаем $\gamma = \frac{A}{\sigma_0}\sigma$ или

$$\sigma = G \cdot \gamma \ - \quad \text{закон Гука.}$$

Такое приближение называется линейно упругим.

Рассмотрим режим вязкого материала

$$\Theta \cdot \gamma = F\big(\frac{\sigma}{\sigma_0}\big)\,, \quad [\,\dot{\gamma}\,] = \frac{1}{T} = [\,\varepsilon^{ij}\,]\,.$$

В случае линейно-вязкого материала $\sigma = \eta \cdot \dot{\gamma}$, $\eta = \frac{\sigma_0 \cdot \Theta}{F'(0)}$ – коэффициент вязкости, будем считать сплошную среду однородной и изотропной.

Замечание 1. Среда называется однородной, если её свойства не зависят от конкретной точки среды (от выбора начала координат).

Замечание 2. Среда называется изотропной, если её свойства не зависят от направления. Пример неизотропной среды – пьезокристалл, дерево и т.п.

Проблема замыкания исходной системы (2)–(4) сводится к установлению связи между тензором касательных напряжений τ^{ij} и тензором скоростей деформации ε^{ij}. Общий вид такой связи в случае изотропной, однородной и линейно-вязкой среды следующий:

$$\tau^{ij} = 2\eta \cdot \left(\varepsilon^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) + \zeta \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \cdot \delta^{ij}, \tag{5}$$

где η и ζ – 1-ый и 2-ой коэффициенты вязкости.

Проблема. Найти вид этой связи в случае изотропной, однородной и нелинейно-вязкой среды.

Здесь стоит обратить внимание на то, что в линейном случае есть только один инвариант – след матрицы. Вид (5) связи обеспечивает переход инвариантов в инварианты. Так,

$$\tau^{11} + \tau^{22} + \tau^{33} = 3 \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

по определению давления. Это означает условие несжимаемости, т.е.

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial x^\alpha} \ll \varrho \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha},$$

при котором уравнение неразрывности примет вид:

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0\,.$$

Система уравнений Навье-Стокса.

Рассмотрим законы сохранения

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial(\varrho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v^i v^\alpha - \sigma^{i\alpha})}{\partial x^\alpha} = f^i, \tag{7}$$

$$\frac{\partial(\varrho \cdot \big(E + \frac{v^2}{2}\big))}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \cdot \big(E + \frac{v^2}{2}\big)v^\alpha - \sigma^{\alpha\beta}v^\beta + q^\alpha)}{\partial x^\alpha} = \epsilon \tag{8}$$

и закон Фурье, выражающий зависимость теплоты от температуры:

$$\bar{q} = -\kappa \cdot \nabla T,$$

(κ – коэффициент теплопроводности). Пусть

$$\sigma^{i\alpha} = -p\delta^{i\alpha} + \tau^{i\alpha}, \tag{9}$$

$\tau^{i\alpha}$ – тензор касательных напряжений. Замыкание системы (6)-(8) будем осуществлять, связывая тензор касательных напряжений с тензором скоростей деформации:

$$\tau^{ij} = 2\eta \cdot \left(\varepsilon^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) + \zeta \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} \cdot \delta^{ij}, \tag{10}$$

где $\varepsilon^{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i})$, η и ζ – 1-ый и 2-ой коэффициенты вязкости, вообще говоря зависящие как от температуры, так и от материала. Пока будем считать их постоянными. Умножим (6) на v^i и полученное произведение вычтем из (7):

$$\varrho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{\partial \tau^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + f^i. \tag{11}$$

Вычислим $\frac{\partial \tau^{i\alpha}}{\partial x^\alpha}$

$$\frac{\partial \tau^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = \eta\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) + \zeta\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} = \eta\Delta v^i + (\zeta + \frac{\eta}{3})\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

и подставим в (11):

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x^i} + \nu\Delta v^i + \frac{1}{\varrho}(\zeta + \frac{\eta}{3})\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{f^i}{\varrho}\,. \tag{12}$$

Запишем это уравнение в векторном виде:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial \bar{v}}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{\varrho}\mathrm{grad}\, p + \nu\Delta\bar{v} + \frac{1}{\varrho}(\zeta + \frac{\eta}{3})\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\bar{v} + \frac{\bar{f}}{\varrho} \tag{13}$$

(здесь $\nu = \frac{\eta}{\varrho}$ – кинематическая вязкость). Уравнение (13) называют уравнением Стокса; количество неизвестных для четырёх уравнений (6), (13) – пять: ϱ, v^1, v^2, v^3, p. Навье предложил замкнуть систему (6), (13), введя требование несжимаемости, а именно, потребовав, чтобы

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial \varrho}{\partial x^\alpha} \ll \varrho \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}\,. \tag{14}$$

Тогда система (6), (12) запишется в виде

$$\mathrm{div}\,\bar{v} = 0\,,$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^\alpha \frac{\partial v^i}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x^i} + \nu\Delta v^i + \frac{f^i}{\varrho}\,.$$

Эта система называется системой Навье-Стокса; в векторном виде она имеет вид:

$$\mathrm{div}\,\bar{v} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}, \nabla)\bar{v} = -\frac{\mathrm{grad}\, p}{\varrho} + \nu\Delta\bar{v} + \frac{\bar{f}}{\varrho}\,.$$

Напомним, что символ ∇ является сокращением для $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3})$, а символ Δ – обозначением для оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial\, x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial\, x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial\, x^3)^2}.$$

В пользу такого подхода к движению среды говорит следующее соображение: рассмотрим равенства (9), (10). Тензор деформации имеет инвариант $\sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33}$. Можно предполагать, что давление p определяется этим инвариантом, т.е.

$$p = -\frac{\sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33}}{3}\,. \tag{15}$$

Тогда из (9) следует, что

$$\tau^{11} + \tau^{22} + \tau^{33} = 0\,. \tag{16}$$

Линейная связь между тензорами касательных напряжений и скоростей деформации (10) позволяет получить зависимость между инвариантами. В самом деле,

$$\tau^{11} + \tau^{22} + \tau^{33} = 2\eta \cdot \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{3} \cdot 3\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) + 3\zeta \cdot \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0\,.$$

Отсюда получаем $\operatorname{div} \bar{v} = 0$, что, согласно уравнению неразрывности (6), может выполняться лишь в предположении (14) о несжимаемости среды. В этом случае будем считать плотность заданной, процесс изотермическим (температура неизменна), уравнение сохранения энергии не рассматривается.

Замечание. В системе Навье-Стокса не участвует 2-ой коэффициент вязкости ζ.