Законы сохранения.

1. **Уравнение неразрывности**. В качестве примера разберём одномерный случай движения частиц ($n = 1$). Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) частицы сплошной среды заполняют отрезок $[a, b]$ на оси Ox, а функция $\varrho(t, x)$ задаёт плотность частиц в этой среде, $\varrho(\cdot)$, $\frac{\partial \varrho}{\partial t}(\cdot)$ – непрерывные функции (на рис. (1) изображены несколько траекторий движения частиц во времени)

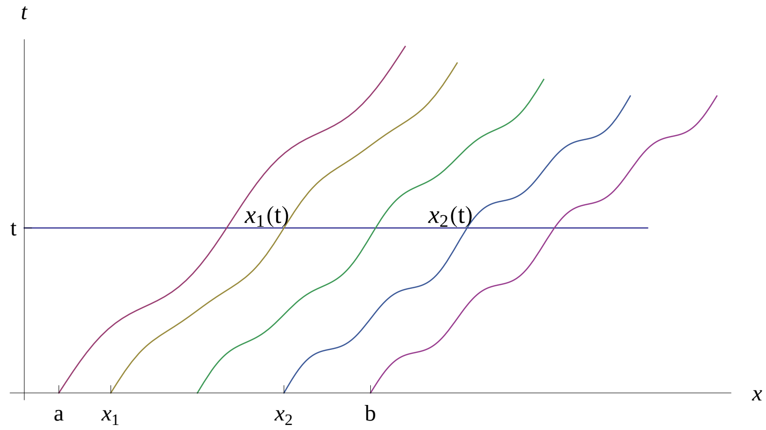

Рис. 1

Будем предполагать, что в рассматриваемой области движения траектории всех частиц задаются непрерывно дифференцируемыми отображениями. Выберем произвольным образом частицы x_1 и x_2 в момент $t = 0$ и рассмотрим их траектории движения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, $x_1(0) = x_1$, $x_2(0) = x_2$. Условие неразрывности сплошной среды означает, что масса всех частиц среды, заключённых между $x_1(t)$ и $x_2(t)$, не меняется со временем, т.е.

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \varrho(t, x)\, dx \equiv C(x_1, x_2). \tag{1}$$

Продифференцируем уравнение (1) по переменной t:

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, x)\, dx + \varrho(t, x_2(t))\frac{dx_2(t)}{dt} - \varrho(t, x_1(t))\frac{dx_1(t)}{dt} = 0. \tag{2}$$

В этом уравнении $\frac{dx(t)}{dt} =: v(t)$ – скорость движения частицы в момент времени t. Предположим дополнительно, что произведение $(\varrho \cdot v)$ непрерывно дифференцируемо по переменной x. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$(\varrho \cdot v)(t, x)\Big|_{x=x_1(t)}^{x=x_2(t)} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial(\varrho \cdot v)}{\partial x}(t, x)\, dx \qquad \text{и, значит,}$$

$$\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial(\varrho \cdot v)}{\partial x}(t, x)\right) dx = 0.$$

Величины $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в этом равенстве могут произвольными допустимыми (т.е. принадлежащими образу какой-либо из траекторий), а это означает, что

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho \cdot v)}{\partial x} = 0. \tag{3}$$

Замечание. Как уже отмечалось, переход от (2) к (3) предполагает дополнительно непрерывную дифференцируемость произведения $\varrho \cdot v$ по переменной x. Если это условие не выполняется, следует пользоваться уравнением неразрывности в форме (2).

Продемонстрированный здесь подход переносится и на многомерный случай ($n = 3$, лемма о жидком объёме [3]). Однако для большинства учебников (см. [1], [2]) принят иной подход к доказательству различных законов сохранения: фиксация в пространстве независящего от времени объёма и рассмотрение баланса той или иной величины по времени для этого объёма. Приведём пример соответствующих рассуждений для уравнения неразрывности:

Выберем в сплошной среде произвольный объём V с границей $\partial V = \Gamma$. Рассмотрим массу этого объёма:

$$\iiint\limits_V \varrho \, dV.$$

Изменение во времени этой массы будет происходить по трём причинам:

1) из-за зависимости плотности от времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint\limits_V \varrho \, dV;$$

2) из-за переноса массы потоком сплошной среды через поверхность выбранного объёма:

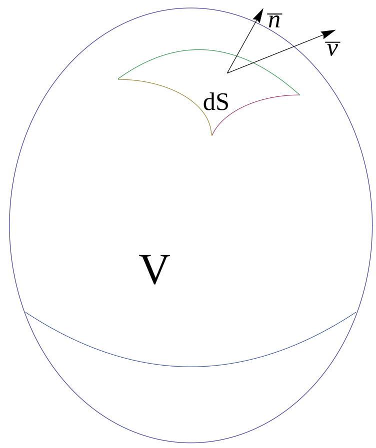

Рис. 2

$$\iint\limits_\Gamma (\varrho \cdot \bar{v}, \bar{n}) \, dS = \iint\limits_\Gamma \varrho \cdot v^n \, dS$$

здесь $\varrho \cdot \bar{v}$ – вектор потока плотности, $\bar{n}$ – внешняя нормаль к границе Γ, dS – элемент поверхности на этой границе;

3) из-за процессов появления или исчезновения массы с плотностью появления и исчезновения $R(\cdot)$:

$$\iiint\limits_V R \, dV.$$

В итоге

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \varrho}{\partial t} \, dV + \iint\limits_\Gamma (\varrho \cdot \bar{v}, \bar{n}) \, dS = \iiint\limits_V R \, dV. \tag{4}$$

Если произведение $\varrho \cdot \bar{v}$ непрерывно дифференцируемо по пространственным переменным, то к (4) можно применить формулу Гаусса-Остроградского. Применим и воспользуемся тем, что выделенный объём V – произвольный:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \cdot \bar{v}) = R \tag{5}$$

или в координатах

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial(\varrho v^\alpha)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v^\alpha)}{\partial x^\alpha} = R \tag{6}$$

(знак суммирования по повторяющимся индексам будем опускать).

Замечание 1. Ещё раз повторим, что переход от (4) к (5) предполагает непрерывную дифференцируемость произведения $\varrho \cdot \bar{v}$ по пространственным переменным. Если это условие не выполняется, то вместо (5)-(6) следует использовать (4).

Замечание 2. Определение вектора потока плотности через поверхность выделенного объёма будем рассматривать как определение понятия скорости движения сплошной среды.

Замечание 3. В выведенном здесь уравнении баланса плотности $\varrho(\cdot)$ присутствуют три новых неизвестных v^1, v^2, v^3 – компонент скорости движения сплошной среды.

Замечание 4. В дальнейшем мы не будем использовать обозначения кратных интегралов.

2. **Уравнение сохранения количества движения**. Будем рассматривать гладкий случай движения среды, когда в рассматриваемой области изменения переменных плотность ϱ, скорость v и тензор напряжений σ (см. ниже) являются непрерывно дифференцируемыми отображениями. Пусть ϱv^i – i-ая компонента вектора потока, $i = 1, 2, 3$. Изменение во времени количества ϱv^i в объёме V с гладкой границей $\partial V = \Gamma$ будет происходить

1) из-за зависимости ϱv^i от времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \varrho v^i \, dV;$$

2) из-за переноса ϱv^i потоком сплошной среды через поверхность выделенного объёма:

$$\int\limits_\Gamma (\varrho v^i \cdot \bar{v}, \bar{n}) \, dS = \int\limits_\Gamma \varrho v^i v^n \, dS\,;$$

3) из-за сопротивления переносу ϱv^i со стороны сплошной среды, находящейся вне выделенного объёма, и воздействующей на выделенный объём через границу Γ:

$$\int\limits_\Gamma (-(\sigma^{ij}), \bar{n}) \, dS = \int\limits_\Gamma -\sigma^{in} \, dS\,;$$

Здесь σ^{ij} – компоненты тензора напряжений. Требование независимости закона сохранения количества движения от системы координат приводит к тому, что преобразование величины σ^{ij} должно производиться также как и величины $\varrho v^i v^j$, т.е. σ^{ij} – тензор 2-го порядка.

4) из-за воздействия внешних массовых сил (например, поля тяготения и т.п.) с внешней стороны выделенного объёма:

$$\int\limits_V f^i \, dV.$$

В итоге

$$\int\limits_V \frac{\partial(\varrho v^i)}{\partial t} \, dV + \int\limits_\Gamma (\varrho v^i \cdot \bar{v}, \bar{n}) \, dS - \int\limits_\Gamma \sigma^{in} \, dS = \int\limits_V f^i \, dV. \tag{7}$$

Применяя формулу Гаусса-Остроградского и используя то, что выделенный объём V произволен, получим:

$$\frac{\partial(\varrho v^i)}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho v^i v^\alpha - \sigma^{i\alpha})}{\partial x^\alpha} = f^i. \tag{8}$$

3. **Закон сохранения энергии**. Вновь будем рассматривать гладкий случай движения среды, когда в некоторой области изменения переменных имеется возможность применять формулу Гаусса-Остроградского, вычислить частную производную по переменной t и менять порядок этой производной с интегралом по объёму. Изменение количества ϱv^i в объёме V с гладкой границей Γ складывается

1) из изменения величины полной энергии во времени

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \varrho \cdot \big(E + \frac{u^2}{2}\big) \, dV$$

здесь $\varrho\, E$ – внутренняя энергия в единице объёма, $u^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$;

2) из переноса энергии потоком сплошной среды через поверхность выделенного объёма:

$$\int\limits_\Gamma \varrho \cdot \big(E + \frac{u^2}{2}\big) \cdot (\bar{v}, \bar{n}) \, dS\,;$$

3) из работы против поверхностных сил, действующих со стороны сплошной среды, находящейся вне выделенного объёма:

$$\int\limits_{\Gamma} (\sigma, \bar{v})^n \, dS = \int\limits_{\Gamma} \sigma^{\alpha\beta} v^{\alpha} n^{\beta} \, dS \, ;$$

4) из тепла, выделяемого сплошной средой через поверхность Γ, при совершении работы против поверхностных сил и внутреннего трения среды:

$$\int\limits_{\Gamma} (\bar{q}, \bar{n}) \, dS = \int\limits_{\Gamma} q^n \, dS \, ,$$

здесь $\bar{q}$ – вектор плотности потока тепла;

5) из источников энергии с плотностью ε:

$$\int\limits_{V} \varepsilon \, dV.$$

В итоге

$$\int\limits_{V} \frac{\partial(\varrho \cdot \left(E + \frac{u^2}{2}\right))}{\partial t} \, dV + \int\limits_{\Gamma} \varrho \cdot \left(E + \frac{u^2}{2}\right) \cdot (\bar{v}, \bar{n}) \, dS + \int\limits_{\Gamma} (\sigma, \bar{v})^n \, dS + \int\limits_{\Gamma} q^n \, dS = \int\limits_{V} \varepsilon \, dV. \quad (9)$$

Применяя формулу Гаусса-Остроградского и используя то, что выделенный объём V произволен, получим:

$$\frac{\partial(\varrho \cdot \left(E + \frac{u^2}{2}\right))}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\varrho \cdot \left(E + \frac{u^2}{2}\right) v^{\alpha} - \sigma^{\alpha\beta} v^{\beta} + q^{\alpha} \right) = \varepsilon. \quad (10)$$

По закону Фурье вектор плотности потока тепла $\bar{q}$ пропорционален градиенту температуры сплошной среды:

$$\bar{q} = -\kappa \cdot \nabla T, \quad (11)$$

где κ – коэффициент теплопроводности. Рассмотрим случай, когда источники массы отсутствуют ($R = 0$). Уравнение (6) умножим на v^i и это произведение вычтем из (8):

$$\varrho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^{\alpha} \frac{\partial v^i}{\partial x^{\alpha}} \right) = \frac{\partial \sigma^{i\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + f^i, \quad (12)$$

или

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^{\alpha} \frac{\partial v^i}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \sigma^{i\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{f^i}{\varrho}. \quad (13)$$

Полной производной по времени или субстанциональной производной от функции $\varphi(t, x)$ вдоль траектории движения частицы $x(t)$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, называют

$$\frac{d\varphi(t, x(t))}{dt} = \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x^{\alpha}} \frac{dx^{\alpha}(t)}{dt} = \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial t} + v^{\alpha} \frac{\partial \varphi(t, x(t))}{\partial x^{\alpha}} \, .$$

Используя это определение, уравнение (12) можно переписать в виде

$$\varrho \, \frac{d\varphi^i}{dt} = \frac{\partial \sigma^{i\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + f^i, \quad (14)$$

что соответствует 2-ому закону Ньютона (масса на ускорение равна сумме действующих сил). Отсюда следует, что σ^{in} есть сила, действующая на единицу поверхности выделенного объёма (поверхностная сила).

Таким образом, описание сплошной среды даётся плотностью ϱ; компонентами скорости v^i, $i = 1, 2, 3$; 9-ю компонентами тензора напряжений σ^{ij}, $i, j = 1, 2, 3$; внутренней энергией E; температурой T. Получилось 15 неизвестных и 5 уравнений. Поскольку число уравнений меньше числа неизвестных, то появляется проблема замыкания получившейся системы. Её решают в зависимости от предположений о свойствах среды. При этом получаются различные модели механики сплошной среды: гидродинамика, газовая динамика, теория упругости и др.

Список литературы

[1] Е.Л. Ландау, В.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, "Наука", Москва, (1988).

[2] Л.И. Седов, *Механика сплошной среды*, "Наука", Москва, (1977).

[3] Л.В. Овсянников, *Лекции по основам газовой динамики*, Москва-Ижевск, (2003).