Лекция 12. Вязкопластические среды: явное решение задачи для круга и решение в угловой области; застойные зоны.

1 Решение задачи для круга.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — круг радиуса R. Найдем решение задачи

$$J(u) := \frac{\mu}{2} \int\limits_D |\nabla u|^2\, dx + \tau \int\limits_D |\nabla u|\, dx - c \int\limits_D u\, dx \to \min, \quad u \in \mathring{W}_2^1(D).$$

Сразу заметим, что решение этой задачи $\hat{u}(x)$ зависит только от $r = |x|$. В самом деле, пусть $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — поворот на угол α вокруг нуля, $\hat{u}_\alpha(x) = \hat{u}(T_\alpha x)$. Тогда $\hat{u}_\alpha$ также будет точкой минимума. Так как решение единственно, то $\hat{u}(T_\alpha x) = \hat{u}(x)$.

Итак, нам достаточно искать минимум на классе функций вида $u(x) = f(r)$. Кроме того, в силу непрерывности функционала J достаточно найти точку минимума среди кусочно-гладких функций $f(r)$.

Можем считать, что $R > \frac{2\tau}{c}$ (иначе решение будет нулевым).

Перейдя к полярным координатам, получим задачу минимизации однократного интеграла:

$$\frac{\mu}{2} \int\limits_0^R r|f'(r)|^2\, dr + \tau \int\limits_0^R r|f'(r)|\, dr - c \int\limits_0^R r f(r)\, dr \to \min, \quad f(R) = 0.$$

Положив $w(r) = f'(r)$, получаем задачу оптимального управления

$$\frac{\mu}{2} \int\limits_0^R r|w(r)|^2\, dr + \tau \int\limits_0^R r|w(r)|\, dr - c \int\limits_0^R r f(r)\, dr \to \min, \quad f(R) = 0, \quad f'(r) = w(r). \quad (1)$$

Рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(f,\, w) = \lambda_0 \int\limits_0^R r \left(\frac{\mu}{2} w^2(r) + \tau |w(r)| - c f(r) \right) dr + \int\limits_0^R p(r)(f'(r) - w(r))\, dr + \lambda_1 f(R).$$

Если $(f,\, w)$ — точка минимума для (1), то найдется нетривиальный набор множителей Лагранжа $\lambda_0 \geqslant 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $p(r)$ такой, что выполнены уравнения Эйлера, условия трансверсальности и принцип максимума Понтрягина, т.е.

$$-p'(r) - c\lambda_0 r = 0, \quad p(0) = 0, \quad p(R) = -\lambda_1,$$

$$\min_{v \in \mathbb{R}} (\lambda_0 \mu r v^2 + 2\lambda_0 \tau r |v| - 2p(r)v) = \lambda_0 \mu r w^2(r) + 2\lambda_0 \tau r |w(r)| - 2p(r) w(r).$$

Если $\lambda_0 = 0$, то $p \equiv 0$ и $\lambda_1 = 0$, то есть все множители Лагранжа нулевые. Значит, $\lambda_0 > 0$ и можно считать, что $\lambda_0 = 1$. Тогда из уравнения и граничного условия получаем $p(r) = -\frac{cr^2}{2}$.

Находим точку минимума функции $\mu r v^2 + 2\tau r|v| - 2p(r)v$ (по v), учитывая, что $p(r) \leqslant 0$. Если $\tau r > |p(r)|$, то $w(r) = 0$. Если $p(r) < -\tau r$ (т.е. $\tau < \frac{cr}{2}$), то $w(r) = \frac{\tau}{\mu} + \frac{p(r)}{r\mu} = \frac{\tau}{\mu} - \frac{cr}{2\mu}$. Отсюда

$$f(r) = \frac{\tau r}{\mu} - \frac{cr^2}{4\mu} + A, \quad \frac{2\tau}{c} \leqslant r \leqslant R,$$

где A — некоторая константа. Обозначив $R_1 = \frac{2\tau}{c}$ и учитывая граничные условия, получаем

$$f(r) = \begin{cases} \frac{c}{4\mu}(R^2 - r^2) + \frac{\tau}{\mu}(r - R), & R_1 \leqslant r \leqslant R, \\ \frac{c}{4\mu}(R^2 - R_1^2) + \frac{\tau}{\mu}(R_1 - R), & 0 \leqslant r \leqslant R_1. \end{cases}$$

Заметим, что $f'(R_1) = 0$, $f'(r) < 0$ при $r > R_1$. Кроме того, $\hat{u}(x) > 0$ всюду внутри области.

2 Застойные зоны.

В работе Г.И. Быковцева и А.Д. Чернышева [1] было показано, что для любого $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ существуют область $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ и функция $u_\alpha : \Omega_\alpha \to \mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами:

1. существует разбиение Ω_α на две (открытые) области D_1 и D_2 такое, что
$$\nabla u_\alpha(x) \neq 0, \quad -\mu \Delta u_\alpha - \tau \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u_\alpha}{|\nabla u_\alpha|}\right) = c, \quad x \in D_1 \tag{2}$$
и $u_\alpha|_{D_2} = 0$.
2. (a) область D_1 выпукла и имеет гладкую границу, состоящую из двух лучей l', l'' и дуги Γ; угол между l' и l'' равен α;
   (b) D_2 ограничена, $\Gamma' := \partial D_1 \cap \partial D_2 \subset \Gamma$ связно (т.е. Γ' также является дугой кривой);
3. $c \leqslant \tau \inf_{\tilde{D} \subset D_2} \frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|}$;
4. $\nabla u_\alpha|_\Gamma = 0$, $u_\alpha|_{\partial D_1} = 0$;
5. для любого $x \in \Gamma$ существует предел $\lim\limits_{y \to x,\, y \in D_1} \frac{\nabla u(y)}{|\nabla u(y)|}$; этот вектор ортогонален Γ в точке x и направлен внутрь области D_1.

Функция u_α будет построена несколько позже, а сейчас мы докажем

Предложение 1. *Пусть $R > \sup\{|x| : x \in D_2\}$, $D = \{x \in \Omega_\alpha : |x| < R\}$, $u_\alpha : \Omega_\alpha \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям 1–5, $f = u_\alpha|_{\partial D}$. Тогда $\hat{u} := u_\alpha|_D$ является точкой минимума в задаче*

$$J(u) := \frac{\mu}{2}\int\limits_D |\nabla u|^2\, dx + \tau \int\limits_D |\nabla u|\, dx - c\int\limits_D u\, dx \to \min, \quad u \in W_2^1(D), \quad u|_{\partial D} = f. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть E — нормированное пространство, $F : E \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, $e_0 \in E$. Тогда e_0 является точкой минимума F в том только том случае, если для любого $h \in E$ выполнено

$$\lim_{t\to+0} \frac{F(e_0+th)-F(e_0)}{t} \geqslant 0.$$

Таким образом, достаточно проверить, что $\lim\limits_{t\to+0} \frac{J(\hat{u}+th)-J(\hat{u})}{t} \geqslant 0$ для любого $h \in \mathring{W}_2^1(D)$. Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\mu \int\limits_{D\cap D_1} \langle \nabla\hat{u}, \nabla h\rangle\, dx + \tau \int\limits_{D\cap D_1} \left\langle \frac{\nabla\hat{u}}{|\nabla\hat{u}|}, \nabla h\right\rangle dx + \tau \int\limits_{D_2} |\nabla h|\, dx - c\int\limits_{D} h\, dx \geqslant 0. \qquad (4)$$

Применив формулу Стокса для области $D\cap D_1$ и воспользовавшись уравнением (2), получаем, что (4) равносильно неравенству

$$\tau \int\limits_{D_2} |\nabla h|\, dx - c\int\limits_{D_2} h\, dx + \tau \int\limits_{\Gamma'} \lim_{y\to x,\, y\in D_1} \frac{\nabla\hat{u}(y)}{|\nabla\hat{u}(y)|} h(x)\overline{n}(x)\, ds(x) \geqslant 0,$$

где $\overline{n}(x)$ — внутренняя нормаль к D_1 в точке $x \in \Gamma$. Из свойства 5 следует, что $\lim\limits_{y\to x,\, y\in D_1} \frac{\nabla\hat{u}(y)}{|\nabla\hat{u}(y)|}\overline{n}(x) = -1$. Тем самым, (4) эквивалентно

$$\tau \int\limits_{D_2} |\nabla h|\, dx - c\int\limits_{D_2} h\, dx + \tau \int\limits_{\Gamma'} h\, ds \geqslant 0. \qquad (5)$$

Это неравенство достаточно проверить для функций $h = \tilde{h}|_{D_2}$, $\tilde{h} \in \tilde{W} = \tilde{W}(D)$ (множество $\tilde{W}$ определено в доказательстве теоремы о величине предельной нагрузки). Далее, представив каждую из таких функций h в виде $h_+ - h_-$, h_+, $h_- \geqslant 0$, получаем, что (5) достаточно доказать для неотрицательных и для неположительных функций.

Если $h \geqslant 0$, то (5) переписывается в виде

$$c \leqslant \tau \sup_{h\neq 0,\, h\geqslant 0} \frac{\int\limits_{D_2} |\nabla h|\, dx + \int\limits_{\Gamma'} h\, ds}{\int\limits_{D_2} h\, dx}.$$

Применяя рассуждения из доказательства теоремы о предельной нагрузке, получаем, что это неравенство эквивалентно свойству 3.

Пусть $h = -w \leqslant 0$. Покажем, что

$$\int\limits_{D_2} |\nabla w|\, dx - \int\limits_{\Gamma'} w\, ds \geqslant 0.$$

Для этого воспользуемся свойством 2. Пусть λ — длина Γ'. Разобьем Γ' на участки Γ_i длины λ/n и проведем хорды $\tilde{\Gamma}_i$, соединяющие их концы, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так как $w = \tilde{w}|_{D_2}$, где $\tilde{w} \in \tilde{W}(D)$, то

$$\int\limits_{\Gamma_i} w\, ds = \int\limits_{\tilde{\Gamma}_i} \tilde{w}\, ds + o(n^{-1}).$$

Через каждую точку $x \in \tilde{\Gamma}_i$ проведем отрезок $[x,\, b(x)]$, перпендикулярный $\tilde{\Gamma}_i$ и такой, что $b(x) \in \partial D_2 \backslash \Gamma'$, $(x,\, b(x)) \subset \Omega_\alpha$. Объединение этих отрезков образует множество $T_i \subset \mathbb{R}^2$. Применив формулу Ньютона – Лейбница, получаем, что

$$\int\limits_{\tilde{\Gamma}_i} \tilde{w}\, ds \leqslant \int\limits_{T_i} |\nabla \tilde{w}|\, ds.$$

Заметим, что $\int\limits_{T_i} |\nabla \tilde{w}|\, ds = \int\limits_{T_i \cap D_2} |\nabla w|\, ds + o(n^{-1})$. Остается просуммировать по i перейти к пределу по $n \to \infty$. $\square$

Если R достаточно велико, то $c > \tau \inf_{\tilde{D} \subset D} \frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|}$. Отсюда, из предложения 1 и принципа мажоризации получаем

Следствие 1. *Существует область D_0, для которой задача*

$$\frac{\mu}{2} \int\limits_{D_0} |\nabla u|^2\, dx + \tau \int\limits_{D_0} |\nabla u|\, dx - c \int\limits_{D_0} u\, dx \to \min, \quad u \in \mathring{(}D_0)$$

имеет нетривиальное решение, равное нулю на некотором открытом множестве (это открытое множество называется застойной зоной).

Теперь перейдем к построению решения со свойствами 1–5. Сначала будем искать решение уравнения (2) специального вида. Сделав замену $\tilde{u} = -u$ и подходящим образом изменив масштаб времени и длины, получаем, что достаточно решить уравнение

$$\Delta \tilde{u} + \operatorname{div} \frac{\nabla \tilde{u}}{|\nabla \tilde{u}|} = 1 \tag{6}$$

(при изменении масштаба времени значение $\tilde{u}$ умножается на константу; при изменении масштаба длины области преобразуются с помощью гомотетии, так что свойства 1–5 сохраняются).

Обозначим $\gamma = |\nabla \tilde{u}|$, $\tilde{u}_{x_1} = \gamma \cos\varphi$, $\tilde{u}_{x_2} = \gamma \sin\varphi$. Подставив это в (6), получаем

$$\gamma_{x_1} \cos\varphi + \gamma_{x_2} \sin\varphi + (1+\gamma)(\varphi_{x_2} \cos\varphi - \varphi_{x_1} \sin\varphi) = 1. \tag{7}$$

Из равенства $(\tilde{u}_{x_1})_{x_2} - (\tilde{u}_{x_2})_{x_1} = 0$ следует, что

$$\gamma_{x_2} \cos\varphi - \gamma \sin\varphi \cdot \varphi_{x_2} - \gamma_{x_1} \sin\varphi - \gamma \cos\varphi \cdot \varphi_{x_1} = 0. \tag{8}$$

Предположим, что существуют обратные функции $x_1 = x_1(\gamma,\, \varphi)$, $x_2 = x_2(\gamma,\, \varphi)$. Сделаем замену

$$X_1(\gamma,\, \varphi) = x_1(\gamma,\, \varphi) \cos\varphi + x_2(\gamma,\, \varphi) \sin\varphi, \quad X_2(\gamma,\, \varphi) = x_2(\gamma,\, \varphi) \cos\varphi - x_1(\gamma,\, \varphi) \sin\varphi. \tag{9}$$

Подставляем эту замену в (7) и (8) и получаем

$$\frac{\partial X_2}{\partial \varphi} + X_1 + (1+\gamma)\frac{\partial X_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial X_1}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial X_2}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial X_1}{\partial \gamma} X_1 + \frac{\partial X_2}{\partial \gamma} X_2, \tag{10}$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \gamma}(\gamma X_2) = 0. \tag{11}$$

Ищем решения (10) и (11) в виде

$$X_1 = 2\gamma w(\varphi) + v(\varphi), \quad X_2 = \gamma w'(\varphi) + v'(\varphi). \tag{12}$$

Подставляем (12) в (10) и приравниваем члены с одинаковыми степенями γ. Получаются уравнения

$$w'' + 4w = 4w^2 + 2ww'' - (w')^2, \quad v'' + v = -\frac{2w}{1-2w}. \tag{13}$$

Общее решение первого уравнения (13) имеет вид

$$w = a\cos 2(\varphi + \alpha) + b, \quad a = \pm\sqrt{b^2 - b}; \tag{14}$$

далее считаем, что $a = (\operatorname{sgn} b)\sqrt{b^2 - b}$. Из второго уравнения (13) получаем

$$v = C_1 \sin\varphi + C_2\cos\varphi + 1 + J_1\sin\varphi + J_2\cos\varphi,$$

$$J_1 = \frac{1}{8a\sqrt{A}} \ln\left|\frac{\sqrt{A} + \sin\varphi}{\sqrt{A} - \sin\varphi}\right|, \quad J_2 = \frac{1}{4a\sqrt{B}} \operatorname{arctg}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{B}}, \tag{15}$$

$$A = \frac{2b + 2a - 1}{4a}, \quad B = \frac{2b - 2a - 1}{4a}. \tag{16}$$

Далее будем рассматривать случай $C_1 = C_2 = 0$, $\alpha = 0$.

Выразим $\tilde{u}$ через φ и γ. Из (9) следует, что $x_1 = X_1\cos\varphi - X_2\sin\varphi$, $x_2 = X_2\cos\varphi + X_1\sin\varphi$. Поэтому

$$d\tilde{u} = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_2}dx_2 = \gamma\cos\varphi\, dx_1 + \gamma\sin\varphi\, dx_2 = \gamma dX_1 - \gamma X_2\, d\varphi.$$

Подставив (12), получаем $d\tilde{u} = d(\gamma^2 w)$. Мы ищем решение $\tilde{u}$ такое, что $\tilde{u}|_\Gamma = 0$, $\nabla\tilde{u}|_\Gamma = 0$ для некоторой кривой Γ. Отсюда

$$\tilde{u} = \gamma^2 w. \tag{17}$$

Из (9) и (12) следует, что

$$x_1 = (2\gamma w + v)\cos\varphi - (\gamma w' + v')\sin\varphi, \quad x_2 = (2\gamma w + v)\sin\varphi + (\gamma w' + v')\cos\varphi. \tag{18}$$

При фиксированном значении γ соотношение (18) задает параметрически линию уровня $\gamma = \mathrm{const}$. В частности, для $\gamma = 0$ получаем

$$x_1 = \cos\varphi + J_2, \quad x_2 = \sin\varphi + J_1.$$

Мы рассматриваем область, в которой $\tilde{u} < 0$. В силу (17), это эквивалентно условиям $\gamma > 0$, $w < 0$. При $b < 0$, $a = -\sqrt{b^2 + |b|}$ второе неравенство означает $\cos 2\varphi > -\frac{|b|}{\sqrt{b^2+|b|}}$.

Рассмотрим кривую L', заданную равенствами (18) (φ — параметр, $\gamma = 0$). Докажем, что при $\varphi \in \left(0, \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$ ее можно задать как график $x_2 = x_2(x_1)$, при этом $\frac{dx_2}{dx_1} = -\operatorname{ctg}\varphi$ и $\frac{d^2x_2}{dx_1^2} < 0$. В самом деле,

$$\frac{dx_1}{d\varphi} = v'\cos\varphi - v\sin\varphi - v'\cos\varphi - v''\sin\varphi = \frac{2w}{1-2w}\sin\varphi,$$

$$\frac{dx_2}{d\varphi} = v' \sin\varphi + v\cos\varphi + v'' \cos\varphi - v' \sin\varphi = -\frac{2w}{1-2w} \cos\varphi.$$

Отсюда следует первое равенство. Далее,

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) \left(\frac{dx_1}{d\varphi}\right)^{-1} = (1+\mathrm{ctg}^{\,2}\varphi) \left(\frac{2w}{1-2w} \sin\varphi\right)^{-1} < 0,$$

поскольку $w < 0$.

Теперь рассмотрим множество точек $(x_1,\, x_2)$, удовлетворяющих (18) с $\gamma \geqslant 0$ и $\varphi = \varphi_* = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{b}{a}\right)$. Покажем, что они лежат на луче l' вида $x_2 = C - x_1 \cdot \mathrm{ctg}\,\varphi_*$, $x_1 \leqslant C_1$ (этот луч касается L'). В самом деле, записываем отношение коэффициентов при γ, учитывая, что $w = 0$:

$$\frac{2w\sin\varphi_* + w'\cos\varphi_*}{2w\cos\varphi_* - w'\sin\varphi_*} = -\mathrm{ctg}\,\varphi_*.$$

Рассмотрев $\varphi \in \left(-\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{b}{a}\right),\, 0\right)$, получаем кривую L'', симметричную L' относительно оси x_1. Аналогично предыдущему случаю, строится луч l''. Объединив замыкания L', L'', l', l'', получаем границу области G.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Г.И. Быковцев, А.Д. Чернышев, “О вязко-пластическом течении в некруговых цилиндрах при наличии перепада давления”, *ЖПМТФ*, N 4 (1966), стр. 94–96.