

Лекция 10. Существование и некоторые свойства решения изопериметрической задачи.

В прошлый раз было установлено, что задача об определении величины предельной нагрузки сводится к нахождению значения $\inf_{\tilde{D} \subset D} \frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|}$. При этом, если область p -связна, то инфимум достаточно брать по множеству k -связных областей, $k \leq p$.

Лемма 1. Пусть D — p -связная область, $K = \sup_{\tilde{D} \subset D} \frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|}$, d — радиус круга, вписанного в область D . Тогда

$$\frac{d}{2} \leq K \leq 8pd.$$

Доказательство. Для доказательства нижней оценки берем в качестве \tilde{D} вписанный круг.

Докажем верхнюю оценку. Пусть $q \in \overline{1, p}$, $\tilde{D} \subset D$ — q -связная область со спрямляемой границей. Тогда $\tilde{D} = D_0 \setminus (\cup_{i=1}^{q-1} E_i)$, где D_0 — односвязная область, E_i — замкнутые связные множества такие, что ∂E_i — образы связных кривых.

Разобьем плоскость на замкнутые квадраты Q_j ($j \in \mathbb{N}$) со стороной $4d$, их центры обозначим a_j . Возможны два случая.

1. Область \tilde{D} содержится в некотором Q_j . Рассмотрим проекцию \tilde{D} на одну из сторон Q_j . Это связное подмножество отрезка, то есть промежуток. Пусть t — его длина. Тогда $|\tilde{D}| \leq 4dt$, $|\partial \tilde{D}| \geq 2t$ и $\frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|} \leq 2d$.
2. Пусть \tilde{D} не содержится ни в каком из квадратов Q_j . Положим

$$J = \{j \in \mathbb{N} : \tilde{D} \cap Q_j \neq \emptyset\}.$$

Тогда $J = J_0 \sqcup J_1 \sqcup J_2$, где

$$J_0 = \{j \in J : \exists i \in \overline{1, q-1} : E_i \subset Q_j\},$$

$$J_1 = \{j \in J \setminus J_0 : a_j \in \tilde{D}\}, \quad J_2 = \{j \in J \setminus J_1 : a_j \notin \tilde{D}\}.$$

Обозначим $k_i = \text{card } J_i$, $i = 0, 1, 2$. Тогда $k_0 \leq q - 1$. Сделав сдвиг области, можно считать, что $k_1 \geq 1$.

Для $j \in J_0 \cup J_1$ площадь $\tilde{D} \cap Q_j$ оценим величиной $16d^2$. Пусть $j \in J_2$, r_j — максимальная длина стороны квадрата \tilde{Q}_j с центром в точке a_j , не пересекающегося с \tilde{D} . Тогда $|\tilde{D} \cap Q_j| \leq 16d^2 - r_j^2$.

Для $j \in J_1 \cup J_2$ оценим снизу величину $|(\partial \tilde{D}) \cap Q_j|$. Так как $E_i \not\subset Q_j$, $0 \leq i \leq q-1$, то любая связная компонента множества $(\partial \tilde{D}) \cap Q_j$ имеет по крайней мере две точки пересечения с границей Q_j (эти точки могут совпадать, но соответствуют разным значениям параметра кривой).

Пусть $j \in J_1$. Поскольку в область \tilde{D} нельзя вписать круг с радиусом, большим d , то найдется точка $b \in \partial\tilde{D}$ такая, что $|a_j - b| \leq d$. Обозначим через Γ связную компоненту $\partial\tilde{D}$, содержащую b , c_1, c_2 — точки ее пересечения с границей Q_j . Тогда

$$\begin{aligned} |(\partial\tilde{D}) \cap Q_j| &\geq |b - c_1| + |b - c_2| \geq \\ &\geq |a_j - c_1| - |a_j - b| + |a_j - c_2| - |a_j - b| \geq 2d - d + 2d - d = 2d. \end{aligned}$$

Пусть $j \in J_2$. Рассмотрим точку $b \in (\partial\tilde{D}) \cap (\partial\tilde{Q}_j)$. Пусть Γ — связная компонента $\partial\tilde{D}$, содержащая b , c_1, c_2 — точки ее пересечения с границей Q_j . Тогда

$$|(\partial\tilde{D}) \cap Q_j| \geq |b - c_1| + |b - c_2| \geq 2d - \frac{r_j}{2} + 2d - \frac{r_j}{2} = 4d - r_j.$$

Тем самым,

$$\frac{|\tilde{D}|}{|\partial\tilde{D}|} \leq \frac{16(q-1)d^2 + 16k_1d^2 + \sum_{j=1}^{k_2}(16d^2 - r_j^2)}{2k_1d + \sum_{j=1}^{k_2}(4d - r_j)}.$$

Покажем, что эта величина не превосходит $8qd$. В самом деле, поскольку $q \geq 1$, $k_1 \geq 1$, то для доказательства неравенства

$$16(q-1)d^2 + 16k_1d^2 + \sum_{j=1}^{k_2}(16d^2 - r_j^2) \leq 16k_1qd^2 + 8qd \sum_{j=1}^{k_2}(4d - r_j)$$

достаточно проверить, что

$$\sum_{j=1}^{k_2}(16d^2 - r_j^2) \leq 8d \sum_{j=1}^{k_2}(4d - r_j).$$

Последнее условие равносильно $\sum_{j=1}^{k_2}(16d^2 - 8dr_j + r_j^2) \geq 0$. Полученное неравенство верно, так как слева стоит сумма полных квадратов. \square

Докажем существование области $\hat{D} \subset D$, на которой достигается минимум $\frac{|\partial\tilde{D}|}{|D|}$ (мы приведем схему доказательства).

Теорема 1. Пусть $p \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная p -связная область. Тогда существует область $\hat{D} \subset D$ такая, что

$$\frac{|\partial\hat{D}|}{|\hat{D}|} = \inf_{\tilde{D} \subset D} \frac{|\partial\tilde{D}|}{|\tilde{D}|}.$$

Доказательство. Как уже говорилось, инфимум достаточно брать по k -связным подобластям, где $k \leq p$. Более того, достаточно рассматривать только p -связные подобласти (если $\tilde{D} \subset D$ является k -связной с $k < p$, то из \tilde{D} удаляем $p - k$ точек, что не изменит ни площадь, ни длину границы).

Шаг 1. Пусть $C = \inf_{\tilde{D} \subset D} \frac{|\partial\tilde{D}|}{|D|}$. Если $\tilde{D} \subset D$ и $\frac{|\partial\tilde{D}|}{|\tilde{D}|} \leq C + 1$, то $|\partial\tilde{D}| \leq (C + 1)|D|$. Поэтому достаточно брать инфимум только по тем подобластям, для которых $|\partial\tilde{D}| \leq (C + 1)|D|$.

Шаг 2. Рассмотрим множество $\Gamma = \Gamma^D$, состоящее из наборов p замкнутых кривых, образы которых лежат в замыкании \overline{D} области D .¹ Введем на нем метрику следующим образом. Пусть $\bar{\gamma} = (\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1})$, γ_j — кривые. Обозначим $C_{\bar{\gamma}}$ множество непрерывных отображений $\bar{r} : [0, 1] \rightarrow \overline{D}^p$, $\bar{r}(t) = (r_0(t), \dots, r_{p-1}(t))$, таких, что r_j является одной из эквивалентных параметризаций кривой γ_j . Пусть $\bar{\gamma}, \bar{g} \in \Gamma$. Положим

$$d(\bar{\gamma}, \bar{g}) = \inf_{r_{\bar{\gamma}} \in C_{\bar{\gamma}}, r_{\bar{g}} \in C_{\bar{g}}} \|r_{\bar{\gamma}} - r_{\bar{g}}\|_{C[0,1]}.$$

Заметим, что если $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — строго возрастающее непрерывное отображение, то

$$\|r_{\bar{\gamma}} - r_{\bar{g}}\|_{C[0,1]} = \|r_{\bar{\gamma}} \circ \tau - r_{\bar{g}} \circ \tau\|_{C[0,1]}. \quad (1)$$

Отсюда легко вывести неравенство треугольника для d . Далее, можно показать, что d — метрика.²

Покажем, что (Γ, d) является полным метрическим пространством. Пусть $\{\bar{\gamma}^n\}$ — фундаментальная последовательность. Переходя к подпоследовательностям, можем считать, что $d(\bar{\gamma}^n, \bar{\gamma}^{n-1}) \leq 2^{-n}$. Поэтому найдутся параметризации $r_{\bar{\gamma}^n}, r_{\bar{\gamma}^{n-1}}$ такие, что $\|r_{\bar{\gamma}^n} - r_{\bar{\gamma}^{n-1}}\|_{C[0,1]} \leq 2^{-n+1}$. Пользуясь (1) и проводя индукцию по n , находим параметризации \tilde{r}_n кривых $\bar{\gamma}^n$ такие, что $\|\tilde{r}_n - \tilde{r}_{n-1}\|_{C[0,1]} \leq 2^{-n+1}$. Из полноты пространства непрерывных функций и замкнутости \overline{D} следует, что $\{\tilde{r}_n\}$ сходится к параметризации некоторого набора p кривых с образами в \overline{D} .

Докажем, что множество

$$\Gamma_l = \{\bar{\gamma} = (\gamma_0, \dots, \gamma_{p-1}) \in \Gamma : |\bar{\gamma}| := \sum_{j=0}^{p-1} |\gamma_j| \leq l\}$$

замкнуто. В самом деле, пусть $\bar{\gamma}^n \rightarrow \bar{\gamma}$ по метрике d , $|\bar{\gamma}^n| \leq l$. Тогда существуют параметризации $r_{\bar{\gamma}^n} = (r_j)_{j=0}^{p-1}$, $r_{\bar{\gamma}} = (r_j)_{j=0}^{p-1}$ наборов кривых $\bar{\gamma}^n$ и $\bar{\gamma}$ соответственно, такие, что

$$\|r_{\bar{\gamma}^n} - r_{\bar{\gamma}}\|_{C[0,1]} \rightarrow 0. \quad (2)$$

Возьмем произвольный набор ломаных \tilde{r}_j , $0 \leq j \leq p-1$, с узлами в точках $t_i \in [0, 1]$, $0 \leq i \leq m$, такой, что $\tilde{r}_j(t_i) = r_j(t_i)$, и покажем, что

$$\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^m |r_j(t_i) - r_j(t_{i-1})| \leq l. \quad (3)$$

В самом деле, из определения длины кривой следует, что $\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=1}^m |r_j^n(t_i) - r_j^n(t_{i-1})| \leq l$;

в силу (2), для любого $i \in \overline{0, m}$

$$|r_j^n(t_i) - r_j^n(t_{i-1})| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |r_j(t_i) - r_j(t_{i-1})|.$$

Из (3) и определения длины кривой получаем, что $|\bar{\gamma}| \leq l$.

¹Напомним, что кривая — это класс эквивалентности параметризаций, а образ кривой — это образ отображения, задающего параметризацию кривой.

²То, что d — полуметрика, сразу следует из определения; для доказательства импликации $d(\bar{\gamma}, \bar{g}) = 0 \Rightarrow \bar{\gamma} = \bar{g}$ проводятся некоторые дополнительные технические рассуждения с монотонными функциями.

Докажем, что множество Γ_l предкомпактно. Для каждого $\varepsilon > 0$ построим конечную ε -сеть.³ Пусть $\delta \in (0, \varepsilon/4)$ — достаточно малое число, $N = \lceil \frac{l}{\delta} \rceil + 1$. Возьмем произвольный набор p кривых $\bar{\gamma} \in \Gamma_l$, для каждой кривой γ_j выберем параметризацию r_j^γ , пропорциональную натуральной. Пусть $0 \leq j \leq p-1$, r_j^g — параметризация ломаной g_j , $r_j^g(\frac{i}{N}) = r_j^\gamma(\frac{i}{N})$, $0 \leq i \leq N$, $r_j^g|_{[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]}$ — аффинные вектор-функции. Обозначим $\bar{g} = (g_j)_{j=0}^{p-1}$. Тогда $d(\bar{\gamma}, \bar{g}) \leq 2\delta$. При этом, $|\bar{g}| \leq l$. Итак, осталось показать, что множество наборов p ломаных, каждая из которых имеет не более N звеньев, имеет конечную $\frac{\varepsilon}{2}$ -сеть. Для этого берем конечную δ -сеть в D (обозначим ее через M_δ) и рассмотрим множество наборов ломаных, у которых значения в узлах принадлежат M_δ и число звеньев не превосходит N . Это множество конечно и при малых δ оно является искомой $\frac{\varepsilon}{2}$ -сетью.

Шаг 3. Пусть $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность p -связных подобластей в D такая, что $\frac{|\partial D_n|}{|D_n|} \rightarrow C$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через $\bar{\gamma}^n = (\gamma_j^n)_{j=0}^{p-1}$ наборы из p кривых, параметризующих границу D_n . Пользуясь компактностью $\Gamma_{(C+1)|D|}$ переходя к подпоследовательностям, можно считать, что $\bar{\gamma}^n \rightarrow \bar{\gamma} \in \Gamma_{(C+1)|D|}$ в метрике d . Тогда $|\bar{\gamma}^n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l_0$ для некоторого $l_0 \in [0, (C+1)|D|]$. В силу леммы 1, D_n содержит круг радиуса $\frac{1}{8p(C+1)}$, поэтому $|D_n|$ отделены от нуля. Так как область D ограничена, то снова из леммы 1 следует, что значения $|\bar{\gamma}^n|$ отделены от нуля и поэтому $l_0 > 0$.

Для каждого $n, k \in \mathbb{N}$ обозначим через $E_{n,k}$ объединение квадратов

$$Q_{ij} = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k} \right] \times \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right],$$

содержащихся в D_n и таких, что

$$\inf_{x \in Q_{ij}} \text{dist}(x, \partial D_n) > \frac{1}{2^{k-1}}.$$

При фиксированном k семейство таких множеств конечно. Пусть $G_{n,k} = \text{int } E_{n,k}$. Выберем бесконечные подмножества $\Lambda_k \subset \mathbb{N}$ такие, что $\Lambda_k \supset \Lambda_{k+1}$ и для любых $n', n'' \in \Lambda_k$ выполнено $E_{n',k} = E_{n'',k}$. Обозначим $G_k = G_{n,k}$, $n \in \Lambda_k$.

Пусть $l = (C+1)|D|$. Тогда ∂D_n имеет $\frac{1}{2^k}$ -сеть $\mathcal{N}_{k,n}$, мощность которой не превосходит $\lceil 2^k l \rceil + 2p$. Так как при $n \in \Lambda_k$

$$D_n \subset G_k \cup \left(\bigcup_{\xi \in \mathcal{N}_{k,n}} B_{2^{-k+3}}(\xi) \right), \quad (4)$$

то

$$|G_k| \geq |D_n| - \frac{c}{k}, \quad (5)$$

где c не зависит от k . Значит, найдется такое $A_0 > 0$, что $|G_k| \geq A_0$ при достаточно больших k . Далее, G_k не пересекается с образом $\bar{\gamma}$ (обозначим его $[\bar{\gamma}]$).

Положим $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Тогда G — непустое открытое множество, не пересекающееся с $[\bar{\gamma}]$ и такое, что $\partial G \subset [\bar{\gamma}]$. В самом деле, если $x \in G$, то $x \in G_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Если $x \in [\bar{\gamma}]$, то $\text{dist}(x, \partial D_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Значит, $\text{dist}(x, \partial D_n) < \frac{1}{2^{k-1}}$ при больших $n \in \Lambda_k$ — противоречие с определением G_k . Пусть $x \in \partial G$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся $k_* \in \mathbb{N}$ и $y \in G_{k_*} \cap B_\varepsilon(x)$. Заметим, что для любого $k \geq k_*$ выполнено $G_{k_*} \subset G_k$. Так как $x \notin G_k$, то найдется $y_k \in (\partial G_k) \cap B_\varepsilon(x)$. Выберем $n \in \Lambda_k$ так, чтобы $d(\bar{\gamma}^n, \bar{\gamma}) < \frac{1}{2^k}$. Тогда найдутся $z_k \in \partial D_n$ и $x_k \in [\bar{\gamma}]$ такие, что $|y_k - z_k| \leq 2^{-k+3}$ (см. (4)), $|x_k - z_k| \leq 2^{-k}$. Для достаточно больших k получаем, что $|x - x_k| < 2\varepsilon$. Значит, $\text{dist}(x, [\bar{\gamma}]) \leq 2\varepsilon$, и в силу произвольности ε получаем, что $x \in [\bar{\gamma}]$.

³Достаточно построить ε -сеть, содержащуюся в $\Gamma^{\mathbb{R}^2} \supset \Gamma^D$.

Так как $|\bar{\gamma}| \leq l_0$, $|D_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{l_0}{C}$, то из (5) получаем, что $\frac{|\bar{\gamma}|}{|G|} \leq C$.

Утверждается,⁴ что для каждой из связных компонент U_m множества G ее граница представляется как объединение образов наборов p кривых \bar{g}^m , причем $\sum_m |\bar{g}^m| \leq |\bar{\gamma}|$.

Так как

$$C \geq \frac{|\bar{\gamma}|}{|G|} \geq \frac{\sum_m |\bar{g}^m|}{\sum_m |U_m|} \geq \inf_m \frac{|\bar{g}^m|}{|U_m|} \geq C,$$

то для любого m выполнено $\frac{|\bar{g}^m|}{|U_m|} = C$. Выбрав одно из множеств U_m , получаем искомую область. \square

Теорема 2. Пусть $\hat{D} \subset D$,

$$\frac{|\partial \hat{D}|}{|\hat{D}|} = \inf_{\tilde{D} \subset D} \frac{|\partial \tilde{D}|}{|\tilde{D}|}. \quad (6)$$

Тогда каждая связная компонента g множества $(\partial \hat{D}) \cap D$ является дугой окружности. Если $x_0 \in \partial D$ является концом одной из таких дуг g и ∂D гладкая в окрестности x_0 , то g касается ∂D в точке x_0 .

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\partial \hat{D}$ параметризуется отображением $t \mapsto (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$, $t \in [0, 1]$. При этом считаем, что эта параметризация пропорциональна натуральной. В этом случае функции \hat{x} и \hat{y} абсолютно непрерывны.

Для замкнутой кривой, параметризуемой отображением $t \mapsto (x(t), y(t))$, $x(\cdot), y(\cdot) \in AC[0, 1]$, ее длина равна

$$l_{x,y} = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt =: \int_0^1 \varphi(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt,$$

а площадь области, ограниченной этой кривой, равна

$$S_{x,y} = \frac{1}{2} \int_0^1 (y(t)\dot{x}(t) - x(t)\dot{y}(t)) dt =: \int_0^1 \psi(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt.$$

Пусть $t_* \in (0, 1)$, $(\hat{x}(t_*), \hat{y}(t_*)) \in D$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что $(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \in D$ для $t \in (t_* - \delta, t_* + \delta)$. Пусть $h(t) = (\xi(t), \eta(t)) \in AC[0, 1]$, $\text{supp } h \subset (t_* - \delta, t_* + \delta)$. Если $\alpha \in \mathbb{R}$ достаточно мало по модулю, то для любого $t \in [t_* - \delta, t_* + \delta]$ выполнено $(\hat{x}(t) + \alpha\xi(t), \hat{y}(t) + \alpha\eta(t)) \in D$. Положим $f(\alpha) = \frac{l_{\hat{x} + \alpha\xi, \hat{y} + \alpha\eta}}{S_{\hat{x} + \alpha\xi, \hat{y} + \alpha\eta}}$. Тогда $f'(\alpha) = 0$. Вычислив эту производную,⁵ получаем, что

$$\begin{aligned} & S_{\hat{x}, \hat{y}} \int_{t_* - \delta}^{t_* + \delta} \left(\varphi_{\dot{x}}(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \dot{\xi}(t) + \varphi_{\dot{y}}(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \dot{\eta}(t) \right) dt - \\ & - l_{\hat{x}, \hat{y}} \int_{t_* - \delta}^{t_* + \delta} \left(\psi_{\dot{x}}(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) \dot{\xi}(t) + \varphi_{\dot{y}}(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) \dot{\eta}(t) + \right. \\ & \left. + \psi_x(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) \xi(t) + \varphi_y(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)) \eta(t) \right) dt = 0. \end{aligned}$$

⁴Доказательство здесь не приводим.

⁵Предельный переход под знаком интеграла возможен в силу теоремы Лебега.

Применив аналог теоремы Дюбуа-Реймона для абсолютно непрерывных функций, получаем уравнения Эйлера:

$$-\frac{d}{dt}f_{\dot{x}}+f_x=0, \quad -\frac{d}{dt}f_{\dot{y}}+f_y=0, \quad f(x, y, \dot{x}, \dot{y})=\varphi(\dot{x}, \dot{y})-\lambda\psi(x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \lambda=\frac{l_{\dot{x}, \dot{y}}}{S_{\dot{x}, \dot{y}}}>0,$$

то есть

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}-\frac{\lambda}{2}\dot{y}\right)+\frac{\lambda}{2}\dot{y}=0, \quad -\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}+\frac{\lambda}{2}\dot{x}\right)-\frac{\lambda}{2}\dot{x}=0.$$

Так как параметризация выбрана пропорциональной натуральной, то

$$-\ddot{x}+\frac{\tilde{\lambda}}{2}\dot{y}+\frac{\tilde{\lambda}}{2}\dot{y}=0, \quad -\ddot{y}-\frac{\tilde{\lambda}}{2}\dot{x}-\frac{\tilde{\lambda}}{2}\dot{x}=0,$$

где $\tilde{\lambda}>0$ — константа. Решения последней системы уравнений задают параметризацию окружности.

Докажем второе утверждение. Пусть $g \subset \partial\hat{D}$ — дуга окружности, пересекающаяся с ∂D в точке x_0 , и величина угла между односторонними касательными к $\partial\hat{D}$ в точке x_0 равна $\alpha \in [0, \pi]$. Покажем, что при $\alpha < \pi$ область \hat{D} не будет удовлетворять (6). В самом деле, пусть $x_1 \in g$, $x_2 \in (\partial D) \cap (\partial\hat{D})$, $|x_0 - x_1| = \delta$, $|x_0 - x_2| = \varepsilon\delta$. По теореме косинусов,

$$\begin{aligned} |x_0 - x_1| + |x_0 - x_2| - |x_1 - x_2| &= \delta + \varepsilon\delta - \sqrt{\delta^2 + \varepsilon^2\delta^2 - 2\delta^2\varepsilon \cos \alpha} = \\ &= \delta(\varepsilon(1 + \cos \alpha) + o(\varepsilon)), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon = \varepsilon_\alpha > 0$ так, чтобы

$$\delta + \varepsilon_\alpha\delta - \sqrt{\delta^2 + \varepsilon_\alpha^2\delta^2 - 2\delta^2\varepsilon_\alpha \cos \alpha} \geq \delta\varepsilon_\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Пусть Γ_δ — контур, состоящий из отрезка $[x_1, x_2]$ и участка $\partial\hat{D}$, проходящего последовательно через точки x_1 , x_0 и x_2 (его обозначим $\partial\hat{D}_{x_1x_0x_2}$; при этом, $|\partial\hat{D}_{x_1x_0x_2}| = |x_0 - x_1| + |x_0 - x_2| + o(\delta)$). При малых δ это жорданов контур, ограничивающий область, которую обозначим D_δ . Тогда $|\hat{D} \setminus D_\delta| = |\hat{D}| - O(\delta^2)$,

$$|\partial(\hat{D} \setminus D_\delta)| = |\partial\hat{D}| - |\partial\hat{D}_{x_1x_0x_2}| + |x_1 - x_2| \stackrel{(7)}{\leq} |\partial\hat{D}| - \delta\varepsilon_\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} + o(\delta).$$

Значит,

$$\frac{|\partial(\hat{D} \setminus D_\delta)|}{|\hat{D} \setminus D_\delta|} \leq \frac{|\partial\hat{D}| - \delta\varepsilon_\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} + o(\delta)}{|\hat{D}| - O(\delta^2)} < \frac{|\partial\hat{D}|}{|\hat{D}|}$$

при малых $\delta > 0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П.П. Мосолов, В.П. Мясников. Прикладная математика и механика, 1965.