Лекция 4. Идеальная несжимаемая жидкость.

Жидкость называется идеальной, если коэффициенты вязкости равны нулю. Предположим, что $\rho(t,\, x)$ является константой. Тогда уравнения, описывающие движение идеальной несжимаемой жидкости, имеют вид

$$v_t + \langle v,\, \nabla\rangle v = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{f}{\rho}, \quad \operatorname{div} v = 0. \tag{0.1}$$

Будем считать, что жидкость все время находится в области Ω. В частности, для любых $t,\, \tilde{t} \in \mathbb{R}$ и для любой точки $x \in \Omega$ найдется точка $\tilde{x} \in \Omega$ такая, что если частица жидкости в момент времени t расположена в точке x, то в момент $\tilde{t}$ она перейдет в точку $\tilde{x}$.

Имеет место теорема Лагранжа.

Теорема 1. *Предположим, что сила f потенциальна, т.е. $f = \nabla U$. Тогда если $\operatorname{rot} v|_{t=0} = 0$, то $\operatorname{rot} v = 0$.*

Доказательство. Движение жидкости задается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = v(t,\, x). \tag{0.2}$$

Тогда каждому $t \geqslant 0$ можно сопоставить диффеоморфизм $g^t : \Omega \to \Omega$ следующим образом: если $y \in \mathbb{R}^3$, то $g^t(y)$ — решение уравнения с начальным условием $x(0) = y$. При этом $g^t(y)$ гладко по совокупности $(t,\, y)$.

Пусть $\gamma : [0,\, 1] \to \mathbb{R}^3$ — параметризация гладкой замкнутой кривой, $\gamma_t = g^t \circ \gamma$. Покажем, что

$$\int\limits_{\gamma_t} v(t,\, x(t))\, dl = \mathrm{const}. \tag{0.3}$$

В самом деле,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\gamma_t} v(t,\, x(t))\, dl = \frac{d}{dt}\int\limits_0^1 v(t,\, g^t\circ\gamma(s))\frac{d}{ds}g^t\circ\gamma(s)\, ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial t}(t,\, \gamma_t(s)) + \langle v,\, \nabla\rangle v(t,\, \gamma_t(s))\right)\frac{d}{ds}\gamma_t(s)\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^1 v(t,\, \gamma_t(s))\frac{d}{ds}v(t,\, \gamma_t(s))\, ds =$$

$$= \frac{1}{\rho}\int\limits_0^1 (-\nabla p + \nabla U)\frac{d}{ds}\gamma_t(s)\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dv^2(t,\, \gamma_t(s)) = \frac{1}{\rho}\int\limits_{\gamma_t}(-\nabla p + \nabla U)\, dl = 0.$$

Если γ является границей поверхности S, то по формуле Стокса из (0.3) получаем

$$\int\limits_{g^t S} \operatorname{rot} v(t,\, x(t))\, dS = \mathrm{const}.$$

В частности, если $\operatorname{rot} v(0,\, x) = 0$ для любого x, то для любого t выполнено $\operatorname{rot} v(t,\, x(t)) = 0$. В самом деле, если $\operatorname{rot} v(t,\, x) \neq 0$ в некоторой точке x, то возьмем достаточно малый участок плоскости S, проходящий через точку x и ортогональный вектору $\operatorname{rot} v(t,\, x)$, и для него получим, что $\int\limits_S \operatorname{rot} v\, dS \neq 0$ — противоречие. □

Если область, в которой находится жидкость, односвязна, то условие $\operatorname{rot} v = 0$ эквивалентно существованию скалярной функции φ такой, что $v = \nabla\varphi$. Из условия несжимаемости следует, что

$$\Delta\varphi = 0. \tag{0.4}$$

Если граница области Γ задана и неподвижна, то для функции v, как правило, пишется условие непроницаемости $\langle v,\, n\rangle = 0$, где n — нормаль к Γ. Значит, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$. Учитывая (0.4), получаем задачу Неймана. Если область ограничена, то нетривиальное (не являющееся константой) решение возможно только при наличии особенностей. Если область бесконечна, то для корректной постановки задачи еще нужно задать условие на бесконечности.

Поскольку $\operatorname{rot} v = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{|v|^2}{2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v^j}{\partial x^i}v^j = \sum_{j=1}^{3} v^j\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \langle v,\, \nabla\rangle v^i.$$

Значит, из

$$v_t + \langle v,\, \nabla\rangle v = -\nabla\frac{p}{\rho} + \nabla\frac{U}{\rho}$$

следует, что

$$\nabla\left(\varphi_t + \frac{|v|^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{U}{\rho}\right) = 0,$$

т.е.

$$\varphi_t + \frac{|v|^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{U}{\rho} = \Phi(t).$$

Последнее равенство называется *интегралом Коши–Лагранжа.*

Если движение стационарное, т.е. все функции не зависят от t, то

$$\frac{|v|^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \frac{U}{\rho} = \mathrm{const}.$$

Это равенство называется *интегралом Бернулли.*

0.1 Плоскопараллельное течение.

Движение называется плоскопараллельным, если существует такая декартова система координат $(x,\, y,\, z)$, в которой вектор скорости имеет вид $(u(x,\, y),\, v(x,\, y),\, 0)$. Условия несжимаемости и потенциальности записываются соответственно в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Тогда существуют такие функции φ и ψ, что $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = v$, $\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v$, $\frac{\partial\psi}{\partial y} = u$. Отсюда видно, что функция $f(x+iy) := \varphi(x,\, y) + i\psi(x,\, y)$ удовлетворяет условиям Коши – Римана, поэтому является аналитической. Заметим также, что линии уровня функций φ и ψ ортогональны, при этом линии уровня функции ψ совпадают с траекториями движения (поэтому ψ называется функцией тока).

Рассмотрим *задачу обтекания*. Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана односвязная ограниченная область с гладкой границей. Требуется в $\mathbb{R}^2\backslash\Omega$ найти такую гармоническую функцию φ, что на $\partial\Omega$ выполнено условие непроницаемости $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, а на бесконечности — $\nabla\varphi(x,\, y) \underset{x^2+y^2\to\infty}{\longrightarrow} (U_\infty,\, V_\infty)$.

По теореме Римана и теореме о соответствии границ, найдется конформное отображение w области $\mathbb{R}^2\backslash\Omega$ на дополнение единичного круга, непрерывное вплоть до границы, при этом $\partial\Omega$ переходит в единичную окружность. Итак, наша задача распалась на две:

1. найти это конформное отображение,

2. решить задачу обтекания для круга.

Мы рассмотрим задачу обтекания круга радиуса R. Подберем такую аналитическую функцию $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$, чтобы $\psi|_{|z|=R} = \mathrm{const}$. Тогда окружность переходит в горизонтальный отрезок. Вспоминаем, что для $R = 1$ таким свойством обладает функция Жуковского $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Для круга радиуса R и условия на бесконечности $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} \nabla\varphi(x,\, y) = (U_\infty,\, 0)$ искомой является функция $f(z) = U_\infty\left(z + \frac{R^2}{z}\right)$. Перейдя снова к вещественным переменным, получаем

$$\varphi(x,\, y) = U_\infty\left(x + \frac{R^2 x}{x^2+y^2}\right), \quad \psi(x,\, y) = U_\infty\left(y - \frac{R^2 y}{x^2+y^2}\right).$$

Задача о построении конформного отображения круга на односвязную область в общем случае является сложной. Различные приближенные методы описаны в [1, 2, 3]. Кратко опишем идею некоторых из них.

1. Приблизим область многоугольником. Если ее граница достаточно хорошая, то соответствующее конформное отображение близко к искомому в равномерной метрике. Единичный круг на многоугольник отображается с помощью интеграла Кристоффеля – Шварца

$$w(z) = A\int\limits_1^z (\zeta - a_1)^{\alpha_1 - 1} \ldots (\zeta - a_n)^{\alpha_n - 1}\, d\zeta + B,$$

   где $\pi\alpha_j$ — значение угла при j-й вершине, A, B, a_j — неопределенные постоянные. Трудность состоит в нахождении a_j. Один из способов их определения состоит в использовании так называемых обобщенных степенных рядов [2].

2. М.А. Лаврентьевым были найдены приближенные формулы для конформных отображений областей, близких к тем областям, отображения которых на канонические известны. При этом использовался вариационный принцип Линделефа и его обобщения.

3. В [2] описан метод последовательных конформных отображений области, содержащейся в верхней полуплоскости, на верхнюю полуплоскость. Для широкого класса

областей он позволяет получить сколь угодно высокую степень точности приближения. Сначала строится отображение области

$$G = \left\{ x + iy : y > 0, \;\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \right\}$$

на верхнюю полуплоскость так, чтобы полуэллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geqslant 0$, перешел в отрезок $|x| \leqslant a+b$, $y = 0$. Для этого сначала полуэллипс с помощью отображения $\tau = \frac{z+\sqrt{z^2+b^2-a^2}}{a+b}$ переводится в единичную полуокружность, которая с помощью функции Жуковского и гомотетии переводится в отрезок. Затем для области $\{x+iy : y > \varphi(x)\}$, где φ — положительная гладкая функция, строится последовательность конформных отображений. На каждом шаге берутся три точки на границе области, через них проводится полуэллипс, и затем строится отображение, переводящее его в горизонтальный отрезок. Обратное отображение полуплоскости на область получается как композиция обратных отображений, которые явно вычисляются по уже найденным точкам.

В [3] рассмотрены методы отображения более сложных областей.

0.2 Осесимметрическое течение.

Пусть $\overline{r}$ — трехмерный вектор, $\overline{v}$ — вектор скорости. Течение называется осесимметрическим, если найдется цилиндрическая система координат (x, r, α) со следующим свойством: все векторы скорости $\overline{v}(\overline{r})$ лежат в полуплоскости, проходящей через ось x и точку $\overline{r}$, и не зависят от координаты α. Если движение потенциально и жидкость несжимаема, то соответствующая гармоническая функция φ зависит только от x и r.

Рассмотрим одну из таких полуплоскостей и функцию $\varphi = \varphi(x, r)$ в этой полуплоскости. Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} \equiv \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right) = 0.$$

Это равенство можно рассматривать как условие потенциальности для векторного поля $\left(-r\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \, r\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$. Введем сопряженную функцию ψ, удовлетворяющую равенствам

$$r\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad r\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{0.5}$$

Функция $f = \varphi + i\psi$ не является аналитической. Все функции такого вида, являющиеся решением системы (0.5), задают класс квазиконформных отображений (определение и свойства таких отображений приведены, например, в [1]; в частности, имеет место аналог теоремы Римана о конформном отображении).

Рассмотрим некоторые примеры решений уравнения Лапласа. Решения, зависящие только от r или только от x, имеют соответственно вид $\varphi = a \ln r + b$ и $\varphi = ax + b$. Подбирая функции ψ, удовлетворяющие (0.5), и выбирая некоторую нормировку, получаем функции

$$Z^1 = \ln r - ix, \quad Z^2 = 2x + ir^2.$$

Аналогично можно найти гармонические полиномы φ произвольной степени[1] и соответствующие функции Z^n.

[1]Например, через шаровые функции, которые, в свою очередь, находятся методом разделения переменных — см. [4].

Теперь рассмотрим решение трехмерного оператора Лапласа с особенностью в нуле: $\varphi = \frac{1}{R}$, где $R = \sqrt{r^2 + x^2}$. Найдем сопряженную функцию ψ. Учитывая вид уравнений (0.5) и функции φ, удобно искать решение в виде $\psi(x,\,r) = \frac{g(x,r)}{R}$. Тогда получается система

$$R^2\frac{\partial g}{\partial r} - rg = -rx, \quad R^2\frac{\partial g}{\partial x} - xg = r^2.$$

Умножим первое уравнение на x, второе на r и вычтем одно из другого. Сократив на R^2, получаем $r\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial r} = r$. Отсюда видно, что $g(x,\,r) = x$ является решением. Тем самым, $\psi = \frac{x}{R}$, так что получается комплекснозначная функция $Z^{-1} = \frac{1+ix}{R}$. Функции Z^{-n} определяются по формулам

$$Z^{-n} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{R} + i\frac{x}{R}\right) = \varphi + i\psi,$$

при этом $\Delta\varphi = 0$ и ψ удовлетворяет (0.5). В частности, $Z^{-2} = \frac{-x+ir^2}{R^3}$.

Посмотрев на эти решения, можно подобрать такую функцию $f = \varphi + i\psi$, что $\psi|_{R=R_0} = \mathrm{const}$:

$$f = \beta Z^2 - \mu Z^{-2}.$$

Тогда $\psi(x,\,r) = \beta r^2 - \mu\frac{r^2}{R^3}$, поэтому $\psi|_{r=0} = 0$, $\psi|_{R=R_0} = 0$, где $R_0 = \left(\frac{\mu}{\beta}\right)^{1/3}$. Для функции $\varphi(x,\,r) = 2\beta x + \frac{\mu x}{R^3}$ выполнено $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2\beta$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0$ (т.е. скорость течения на бесконечности параллельна оси x и равна 2β).

Если $\beta = \mu$, то $\varphi = \beta x\left(2 + \frac{1}{R^3}\right)$. Если ввести полярные координаты $x = R\cos\theta$, то касательная к окружности радиуса R составляющая вектора скорости равна $\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$. Значит, на единичной окружности $v = -3\beta\sin\theta$.

Тем самым, мы решили задачу обтекания шара и нашли скорость проскальзывания. Это мы будем использовать при рассмотрении задач о пограничном слое.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, *Проблемы гидромеханики и их математические модели.*

[2] П.Ф. Фильчаков, *Приближенные методы конформных отображений.* Киев, Наукова думка, 1964.

[3] В.И. Власов, *Краевые задачи в областях с криволинейной границей.* М., Вычислительный центр АН СССР, 1987.

[4] В.С. Владимиров, В.В. Жаринов, *Уравнения математической физики.* М., Физматлит, 2000.