

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ  
на 2 потоке 4 курса механико-математического  
факультета МГУ

1. Простейшие свойства делимости. Представление наибольшего общего делителя  $d$  чисел  $a$  и  $b$  в форме  $d = au + bv$ . Теорема о существовании и единственности разложения чисел на простые сомножители. Бесконечность множества простых чисел.

2. Лемма о равенстве верхних и нижних пределов функций  $(\theta(x))/x$ ,  $(\psi(x))/x$  и  $(\pi(x) \ln x)/x$ . Связь между асимптотическим поведением функции Чебышева  $\psi(x)$  и сходимостью интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^2} dx.$$

3. Оценки Чебышева функции  $\pi(x)$ . Оценки  $n$ -го простого числа. Расходимость ряда  $\sum_p \frac{1}{p}$ .

4. Аналитичность дзета-функции Римана в области  $\sigma > 1$ . Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической производной. Представление дзета-функции в виде бесконечного произведения.

5. Преобразования Абеля в интегральной форме. Аналитическое продолжение дзета-функции в область  $\sigma > 0$ .

6. Отсутствие нулей дзета-функции в области  $\sigma \geq 1$ .

7. Формулировка асимптотического закона распределения простых чисел. Сведение его доказательства к исследованию некоторого комплексного интеграла.

8. Доказательство асимптотического закона распределения простых чисел. Асимптотическая формула  $n$ -го простого числа.

9. Простейшие свойства сравнений. Группа  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ . Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма. Элементарные доказательства бесконечности множества простых чисел в прогрессиях вида  $4n + 1$  и  $4n + 3$ .

10. Простейшие свойства групповых характеров. Построение характеров. Вычисление сумм  $\sum_{a \in G} \chi(a)$  и  $\sum_{\chi} \chi(a)$  для характеров  $\chi$  группы  $G$ . Определение и свойства числовых характеров.

11. Аналитичность функции Дирихле  $L(s, \chi)$  в области  $\sigma > 1$ . Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической производной. Отсутствие нулей  $L$ -функции в области  $\sigma > 1$ . Представление  $L$ -функции в виде бесконечного произведения. Аналитическое продолжение функции  $L(s, \chi_0)$  в область  $\sigma > 0$ .

12. Теорема о почленном дифференцировании ряда Дирихле. Область аналитичности функции  $L(s, \chi)$  при  $\chi \neq \chi_0$ .

13. Теорема об области сходимости ряда Дирихле с неотрицательными коэффициентами.

14. Неравенство  $L(1, \chi) \neq 0$  для действительного характера  $\chi$ .

15. Неравенство  $L(1, \chi) \neq 0$  при  $\chi^2 \neq \chi_0$ .

16. Доказательство теоремы Дирихле о бесконечности множества простых чисел в арифметической прогрессии.

17. Свойства минимального многочлена алгебраического числа. Целые алгебраические числа. Лемма Гаусса и ее следствия, относящиеся к целым алгебраическим числам.

18. Формулировка основной теоремы о симметрических многочленах. Теорема о симметрическом многочлене от нескольких систем сопряженных алгебраических чисел. Поле алгебраических чисел и кольцо целых алгебраических чисел. Алгебраическая замкнутость поля алгебраических чисел.

19. Алгебраическое числовое поле конечной степени. Каноническая форма представления его элементов. Теорема о числах, сопряженных в алгебраическом числовом поле. Теорема о примитивном элементе.

20. Две теоремы о приближении действительных чисел рациональными дробями. Построение чисел, имеющих заданный порядок приближений.

21. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел. Построение трансцендентных чисел при помощи теоремы Лиувилля.

22. Обобщение теоремы Лиувилля на многочлены от нескольких алгебраических чисел.

23. Теорема Бореля о характере приближений "почти всех" действительных чисел.

24. Иррациональность и трансцендентность числа  $e$ .

25. Иррациональность числа  $\pi$ .

26. Лемма Зигеля об оценках решений систем линейных уравнений с целыми коэффициентами.

27. Формулировка теоремы Линдемана. Ее следствия. Построение вспомогательной функции для доказательства теоремы Линдемана, оценки ее порядка нуля.

28. Оценки вспомогательной функции и завершение доказательства теоремы Линдемана. Ее связь с проблемой квадратуры круга.

29. Седьмая проблема Гильберта. Формулировка теоремы Гельфонда-Шнейдера. Ее следствия. Построение вспомогательной функции для доказательства теоремы Гельфонда-Шнейдера, оценки ее порядка нуля.

30. Оценки вспомогательной функции и завершение доказательства теоремы Гельфонда-Шнейдера.

Лектор

А.И.Галочкин