

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ  
на 4 курсе вечернего отделения  
механико-математического факультета МГУ

1. Простейшие свойства делимости. Представление наибольшего общего делителя  $d$  чисел  $a$  и  $b$  в форме  $d = au + bv$ . Теорема о существовании и единственности разложения чисел на простые сомножители. Бесконечность множества простых чисел.
2. Лемма о равенстве верхних и нижних пределов функций  $(\theta(x))/x$ ,  $(\psi(x))/x$  и  $(\pi(x) \ln x)/x$ .
3. Оценки Чебышева функции  $\pi(x)$ . Оценки  $n$ -го простого числа. Расходимость ряда  $\sum_p \frac{1}{p}$ .
4. Аналитичность дзета-функции Римана в области  $\sigma > 1$ . Разложение в ряд Дирихле ее логарифмической производной. Представление дзета-функции в виде бесконечного произведения.
5. Преобразования Абеля в интегральной форме. Аналитическое продолжение дзета-функции в область  $\sigma > 0$ .
6. Отсутствие нулей дзета-функции в области  $\sigma \geq 1$ . Формулировка асимптотического закона распределения простых чисел.
7. Простейшие свойства сравнений. Группа  $(Z/mZ)^*$ . Теорема Эйлера. Малая теорема Ферма. Число решений полиномиального сравнения по простому модулю.
8. Свойства символа Лежандра. Квадратический закон взаимности. Символ Якоби.
9. Алгоритм решения сравнений по простому модулю.
10. Подъем решений сравнения. Китайская теорема об остатках. Решение сравнений по составному модулю.
11. Простейшие свойства мультипликативных функций. Формула обращения Мебиуса. Явная формула для значений функции Эйлера, мультипликативность этой функции. Система шифрования RSA.
12. Первообразные корни. Модули, по которым существуют первообразные корни.
13. Простейшие свойства групповых характеров. Построение характеров. Определение и свойства числовых характеров.
14. Свойства минимального многочлена алгебраического числа. Целые алгебраические числа. Лемма Гаусса и ее следствия, относящиеся к целым алгебраическим числам.
15. Формулировка основной теоремы о симметрических многочленах от нескольких систем переменных. Поле алгебраических чисел и кольцо целых алгебраических чисел. Алгебраическая замкнутость поля алгебраических чисел.
16. Две теоремы о приближении действительных чисел рациональными дробями. Построение чисел, имеющих заданный порядок приближений.
17. Теорема Лиувилля о приближении алгебраических чисел. Построение трансцендентных чисел при помощи теоремы Лиувилля.
18. Теорема Бореля о характере приближений "почти всех" действительных чисел.
19. Иррациональность и трансцендентность числа  $e$ .
20. Иррациональность числа  $\pi$ . Формулировка теоремы Линдемана. Ее следствия.
21. Простейшие свойства цепных дробей. Приближения чисел подходящими дробями (оценки сверху и снизу). Цепные дроби как наилучшие приближения.

Лектор

А.И.Галочкин