Вопросы к экзамену
по курсу

ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

4 курс, 1 поток, 2023–2024 г.

1. Оценки Чебышева для функции $\pi(x)$. Доказательство равносильности асимптотического закона распределения простых чисел утверждению $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\psi(x)}{x}=1$.
2. Определение функции $\zeta(s)$ и ее простейшие свойства в области $\Re s>1$: аналитичность, представление $\zeta'(s)$ и $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ в виде рядов Дирихле, отсутствие нулей.
3. Тождество Эйлера для $\zeta(s)$.
4. Аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в область $\Re s>0$.
5. Отсутствие нулей у функции $\zeta(s)$ на прямой $\Re s=1$.
6. Вывод утверждения $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\psi(x)}{x}=1$ из сходимости интеграла $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\psi(x)-x}{x^2}dx$.
7. Доказательство сходимости интеграла $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\psi(x)-x}{x^2}dx$.
8. Характеры Дирихле. Вычисление сумм $\displaystyle\sum_a\chi(a)$ и $\displaystyle\sum_\chi\chi(a)$. Доказательство неравенства $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{x}\chi(n)\right|\leqslant\varphi(m)$ для неглавного характера.
9. L-функции Дирихле и их простейшие свойства в области $\Re s>1$: аналитичность, представление $L'(s,\chi)$ и $\dfrac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$ в виде рядов Дирихле, отсутствие нулей.
10. Тождество Эйлера для L-функций, аналитическое продолжение $L(s,\chi)$ в область $\Re s>0$.
11. Доказательство утверждения $L(1,\chi)\neq 0$ для неглавных вещественных характеров χ.
12. Доказательство утверждения $L(1,\chi)\neq 0$ для невещественных характеров χ.
13. Доказательство теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
14. Теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными. Следствие для иррациональных чисел.
15. Теорема Лиувилля о приближении рациональными числами алгебраических чисел. Трансцендентность числа $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n!}$.
16. Иррациональность чисел e и π.
17. Трансцендентность числа e.

18. Теорема Лиувилля о значениях многочлена с целыми коэффициентами на алгебраических числах.

19. Трансцендентность числа π: лемма о представлении функции $R_n(z)$ в виде линейной комбинации экспонент с полиномиальными коэффициентами.

20. Трансцендентность числа π: асимптотика функции $R_n(z)$.

21. Трансцендентность числа π: непосредственный вывод теоремы из свойств функции $R_n(z)$.

Лекторы: д.ф.-м.н. Герман О.Н., к.ф.-м.н. Рочев И.П.