ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

4-й курс механико-математического факультета МГУ

Лектор — проф. О. Н. Герман

1. Оценки Чебышёва для функции $\pi(x)$. Доказательство равносильности асимптотического закона распределения простых чисел утверждению $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$.
2. Определение функции $\zeta(s)$ и её простейшие свойства в области $\mathfrak{Re}\, s > 1$: аналитичность, представление $\zeta'(s)$ и $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ в виде рядов Дирихле, отсутствие нулей.
3. Тождество Эйлера для $\zeta(s)$.
4. Аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в область $\mathfrak{Re}\, s > 0$.
5. Отсутствие нулей у функции $\zeta(s)$ на прямой $\mathfrak{Re}\, s = 1$.
6. Вывод утверждения $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$ из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
7. Доказательство сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)-x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
8. Характеры Дирихле. Вычисление сумм $\sum_a \chi(a)$ и $\sum_\chi \chi(a)$. Доказательство неравенства $|\sum_{n\leqslant x} \chi(n)| \leqslant \varphi(m)$ для неглавного характера.
9. L-функции Дирихле и их простейшие свойства в области $\mathfrak{Re}\, s > 1$: аналитичность, представление $\mathrm{L}'(s,\chi)$ и $\frac{\mathrm{L}'(s,\chi)}{\mathrm{L}(s,\chi)}$ в виде рядов Дирихле, отсутствие нулей.
10. Тождество Эйлера для L-функций. Аналитическое продолжение L-функций в область $\mathfrak{Re}\, s > 0$.
11. Доказательство утверждения $\mathrm{L}(1,\chi) \neq 0$ для неглавных вещественных характеров χ.
12. Доказательство утверждения $\mathrm{L}(1,\chi) \neq 0$ для невещественных характеров χ.
13. Доказательство теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.
14. Теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными. Следствие для иррациональных чисел.
15. Теорема Лиувилля о приближении рациональными числами алгебраических чисел. Трансцендентность числа $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n!}$.
16. Иррациональность чисел e и π.
17. Трансцендентность числа e.
18. Алгебраические числа. Замкнутость множества алгебраических чисел относительно арифметических операций.
19. Целые алгебраические числа. Замкнутость множества целых алгебраических чисел относительно сложения, вычитания и умножения.
20. Теорема о примитивном элементе. Степень конечного расширения поля $\mathbb{Q}$.
21. Алгебраическая замкнутость поля алгебраических чисел.
22. Вложения конечного расширения поля $\mathbb{Q}$ в поле $\mathbb{C}$. Нормальные расширения. Определение группы Галуа.
23. Множество образов элемента при различных вложениях конечного расширения. Норма в алгебраическом расширении.
24. Теорема Линдемана–Вейерштрасса. Следствия из неё. Сведение доказательства к теореме об экспоненциальной линейной форме, коэффициенты ряда Тейлора которой рациональны.
25. Доказательство теоремы об экспоненциальной линейной форме, коэффициенты ряда Тейлора которой рациональны.