Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет
Кафедра Теории чисел

Курсовая работа

Свойства рациональных чисел с заданной суммой неполных частных
The properties of rational numbers with fixed sum of partial quotients

Студента 305 группы
Гайфулина Дмитрия Радиславовича
Научный руководитель:
д.ф.-м.н. проф. Мощевитин Н.Г.

Москва 2010

Данная работа посвящена исследованию специального вида сумм отрезков из разбиения Фарея. В ней описываются разные взгляды на это разбиение: непосредственное определение, через континуанты, а также чрезвычайно интересный способ представления через действие свободной двухпараметрической группы на отрезок $[\frac{1}{2}, 1]$ все множества, исследуемые в данной работе принадлежат отрезку $[0, 1]$

Часть 1. Конструкция разбиения Фарея.

Рассмотрим отрезок $[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}]$. Назовем два его конца *точками разбиения Фарея нулевого уровня.* Далее конструкция следующая: пусть у нас отмечены все точки отрезка нулевого, первого и так далее до n-го уровня: $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1} \dots \frac{a_k}{b_k}$, упорядоченные по возрастанию. Тогда назовем *точками разбиения Фарея $n+1$-го уровня* точки $\frac{a_i}{b_i} \oplus \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_i + a_{i+1}}{b_i + b_{i+1}}, i \in [0, k-1]$. Множество точек нулевого, первого, $\dots k$-го уровня назывется *k-ым разбиением отрезка.* Определлнная выше операция $\oplus$ называется *медиантой* двух дробей.

Лемма 1. Медианта двух дробей всегда лежит между ними.

Доказательство. Пусть $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ это значит, что $ad - bc > 0$, тогда рассмотрим разность $\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{(b+d)d} > 0$. Аналогично показывается, что $\frac{a+c}{b+d} < \frac{a}{b}$, что и требовалось доказать. □

Далее, несложно заметить, что в k-ом разбиении точки k-го уровня идут, чередуясь, с точками разбиения всех остальных уровней. Поскольку для $k-1$-го уровня это также верно, одним из соседей точки k-го уровня является точка $k-1$-го уровня, а вторым соседом - точка уровня от нулевого до $k-2$-го.

Примеры разбиений.

$[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}]$ - нулевое разбиение
$[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}]$ - первое разбиение
$[\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}]$ - второе разбиение
$[\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}]$ -третье разбиение
$[\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}]$ -четвертое разбиение
. . . .
$(\frac{0}{1}, \frac{1}{1})$ - точки нулевого уровня
$(\frac{1}{2})$ - точка первого уровня.
$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ - точки второго уровня
$(\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4})$ - точки третьего уровня
$(\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{5}{7}, \frac{4}{5})$ - точки четвертого уровня
. . . .

Свойства разбиения Фарея.

1)Если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ соседние точки какого-то разбиения, то $|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}|=\frac{1}{bd}$

Доказательство. Индукция по номеру разбиения. Для нулевого разбиения это, очевидно верно, далее, если $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ соседние точки k-го разбиения и по предположению $|\frac{p}{q}-\frac{r}{s}|=\frac{1}{qs}$, то $|\frac{p+r}{q+s}-\frac{r}{s}|=|\frac{ps-qr}{(q+s)s}|$ =(применяем предположение)= $\frac{1}{(q+s)s}$. Аналогично доказывется равенство $|\frac{p+r}{q+s}-\frac{p}{q}|=\frac{1}{q(q+s)}$ □

2)Все полученные с помощью медиант дроби будут несократимы.

Доказательство. По свойству 1) $|ad-bc|$=1, где $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ соседние дроби, следовательно (a,b)=1, поскольку $|ad-bc|$ делится на НОД. □

3)Множество точек любого уровня симметрично относительно точки $\frac{1}{2}$

Доказательство. Индукция по номеру уровня. Если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ -предки $\frac{a+c}{b+d}$, то на соответствующих уровнях есть также соседние точки $\frac{b-a}{b}$ и $\frac{d-c}{d}$, их медианта порождает точку $\frac{b-a+d-c}{b+d}=1-\frac{a+c}{b+d}$, что и трбовалось доказать. □

4)На n-ом уровне разбиения находятся 2^{n-1} точек, где $n\geq 1$.

Доказательство. Индукция. Для 1-го уровня это верно, а каждая точка n-го уровня порождает 2 точки $n+1$-го. □

Часть 2. Континуанты. Постановка задачи.

Определение: *Континуантом* называется функция $[a_1\dots a_n]\rightarrow\mathbb{N}$ от неотрицательного количества натуральных чисел в $\mathbb{N}$, определенная по следующему правилу.

$[\ ]=1$

$[a_1]=a_1$

$[a_1\dots a_n]=a_n[a_1\dots a_{n-1}]+[a_1\dots a_{n-2}]$

a_i называются *неполными частными*

Пример:

$[1,2,3]=3[1,2]+[1]=3(2[1]+[\ ])+[1]=10$

Свойства континуантов.

1) $[a_1\dots a_n,1]=[a_1\dots a_n+1]$

Доказательство. $[a_1\dots a_n,1]=[a_1\dots a_n]+[a_1\dots a_{n-1}]=$
$=(a_n+1)[a_1\dots a_n-1]+[a_1\dots a_n-2]=[a_1\dots a_n+1]$ □

2) *Лемма об обращении континуантов* $[a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n] = [a_n, a_{n-1} \ldots a_2, a_1]$

Доказательство. Индукция по длине континуанта. $[a_1 \ldots a_n] = a_n[a_1 \ldots a_{n-1}]+$ $+[a_1 \ldots a_{n-2}] = a_n[a_{n-1} \ldots a_1]+[a_{n-2} \ldots a_1] = a_n a_1[a_2 \ldots a_{n-1}]+a_n[a_3 \ldots a_{n-1}]+$ $+a_1[a_2 \ldots a_{n-2}] + [a_3 \ldots a_{n-2}] = a_1[a_2 \ldots a_n] + [a_3 \ldots a_n] = a_1[a_n \ldots a_2] +$ $+[a_n \ldots a_3] = [a_n \ldots a_1]$ $\square$

3)Связь с цепными дробями: если $[[0; a_1, a_2 \ldots a_t]] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \frac{1}{a_t}}}}$,

то $[[0; a_1, a_2 \ldots a_t]] = \frac{[a_2 \ldots a_t]}{[a_1 \ldots a_t]}$

Доказательство. Индукция по длине континуанта $\frac{[a_2 \ldots a_n]}{[a_1 \ldots a_n]} = \frac{1}{\frac{[a_1 \ldots a_n]}{[a_2 \ldots a_n]}} =$

$= \frac{1}{\frac{a_1[a_2 \ldots a_n]+[a_3 \ldots a_n]}{[a_2 \ldots a_n]}} = \dfrac{1}{a_1 + \frac{[a_3 \ldots a_n]}{[a_2 \ldots a_n]}}$, а к $\frac{[a_3 \ldots a_n]}{[a_2 \ldots a_n]}$ мы можем применить предположение индукции.

Замечание. Для того, чтобы разложение рационального числа в цепную дробь было однозначным принято, чтобы $a_t \neq 1$. $\square$

4) *связь с разбиением Фарея*: все точки n-го уровня разбиения имеют вид $[[0; a_1, a_2 \ldots a_t]]$, где $\sum\limits_{i=1}^{t} a_i = n + 1, a_t \neq 1$, причем родителями этой точки являются точки $[[0; a_1, a_2 \ldots a_t - 1]]$ - точка $n-1$-го уровня и $[[0; a_1, a_2 \ldots a_{t-1}]]$ - уровня меньше $n - 1$.

Доказательство. Поскольку $[[0; a_1, a_2 \ldots a_t]] = \frac{[a_2 \ldots a_t]}{[a_1 \ldots a_t]}$
, а числители и знаменатели в процессе построения разбиений складываются независимо, докажем утверждение только про знаменатели т.е. что знаменатели всех точек n-го уровня имеют вид $[a_1 \ldots a_t]$, где $\sum\limits_{i=1}^{t} a_i = n + 1, a_t \neq 1$, для чичлителей все будет полностью аналогично.
И так, пусть у нас есть число n-го уровня со знаменателем $[a_1 \ldots a_t]$, а у его родителей знаменатели $[a_1 \ldots a_t - 1]$ и$[a_1 \ldots a_{t-1}]$, тогда одним его потомком будет число со знаменателем $[a_1 \ldots a_t] + [a_1 \ldots a_{t-1}] = [a_1 \ldots a_{t+1}]$ т.е. для него оба утверждения про сумму неполных частных и вид потомков, очевидно, выполняются. Рассмотрим второго потомка: его знаменателем будет $[a_1 \ldots a_t] + [a_1 \ldots a_t - 1] = (2a_t - 1)[a_1 \ldots a_{t-1}] + 2[a_1 \ldots a_{t-2}] =$

$= 2[a_1 \dots a_t - 1] + [a_1 \dots a_{t-1}] = [a_1 \dots a_t - 1, 2]$. Сумма неполных частных у него, очевидно,$n+2$, а благодаря свойству 1) выполняется и утверждение про потомки. Далее, заметим, что всего отрезков n-го уровня 2^{n-1}. Найдем число способов, которыми можно представить $n+1$ в виде суммы натуральных слагаемых так, чтобы последнее было больше 1 (т.е. таким образом мы найдем число соответствующих континуантов). Это классическая задача про колонну из $n+1$ объектов, между каждыми мы можем поставить или не поставить перегородку, перегородка соответствует знаку суммирования, между n и $n+1$ объектом перегородку ставить нельзя. Таким образом у нас $n-1$ место, куда можно поставить перегородку, следовательно всего 2^{n-1} вариант, то есть существует ровно 2^{n-1} континуантов с суммой неполных частных $n+1$. Таким образом, мы установили биективное соответствие между точками n-го уровня разбиения Фарея и континуантами с суммой неполных частных $n+1$. Что и требовалось доказать. $\square$

Сформулируем теперь основную задачу. Для каждой точки n-го уровня разбиения рассмотрим два отрезка, концами которых она являеется в n-ом разбиении. Если знаменатель для этой точки имеет вид $[a_1 \dots a_t]$, то по свойству 1) разбиения Фарея отрезки $[\frac{[a_2 \dots a_t]}{[a_1 \dots a_t]}; \frac{[a_2 \dots a_t - 1]}{[a_1 \dots a_t - 1]}]$ и $[\frac{[a_2 \dots a_t]}{[a_1 \dots a_t]}; \frac{[a_2 \dots a_{t-1}]}{[a_1 \dots a_{t-1}]}]$ имеют длины $\frac{1}{[a_1 \dots a_t][[a_1 \dots a_t - 1]}$ и $\frac{1}{[a_1 \dots a_t][[a_1 \dots a_{t-1}]}$, при этом первый отрезок, очевидно, всегда короче второго. Поскольку в суммме все такие отрезки всегда дают 1, то $\sum\limits_{a_1 + \dots + a_t = n, a_t \neq 1} \frac{1}{[a_1 \dots a_t][[a_1 \dots a_t - 1]} + \frac{1}{[a_1 \dots a_t][[a_1 \dots a_{t-1}]} = 1$. В данной работе мы будем исследовать поведение суммы первых слагаемых (поскольку в сумме со вторыми они дают 1, мы сможем делать выводы и про сумму вторых). Сумма первых слагаемых равна сумме длин маленьких отрезков, прилежащих к точкам соответствующего уровня разбиения. Обозначим $\sigma(n) = \sum\limits_{a_1 + \dots + a_t = n, a_t \neq 1} \frac{1}{[a_1 \dots a_t][[a_1 \dots a_t - 1]}$. Введем также обозначение $\sigma'(n) = \sum\limits_{a_1 + \dots + a_t = n, a_t \neq 1} \frac{1}{[a_1 \dots a_t]^2}$

Часть 3. Теорема 1

Сформулируем очевидное утверждение:

Лемма 2. $\sigma'(n) < \sigma(n) < 2\sigma'(n)$, а также $\sigma'(n) = \sum\limits_{a_1 + \dots + a_t = n, a_t \neq 1} \frac{1}{[a_1 \dots a_t]^2} = \frac{1}{2} \sum\limits_{a_1 + \dots + a_t = n} \frac{1}{[a_1 \dots a_t]^2}$

Доказательство. Очевидно исходя из вида сумм. Вторая часть верна, поскольку если разрешить a_t быть равным 1, для каждого набора $[a_1 \dots a_t]$, $a_t \neq 2$ мы имеем набор $[a_1 \dots a_t - 1, 1]$ с тем же значением континуанты. $\square$

Лемма 3. $\sum\limits_{a=2}^{n-1} \frac{\sigma'(n-a)}{a+1} < \frac{1}{2}$

Доказательство. $\sum\limits_{a_1+...+a_t=n, a_t\neq 1} \frac{1}{[a_1...a_t][[a_1...a_t-1]} + \frac{1}{[a_1...a_t][[a_1...a_{t-1}]}=1$, следовательно $\sum\limits_{a_1+...+a_t=n, a_t\neq 1} \frac{1}{[a_1...a_t][[a_1...a_{t-1}]}<1$.

$1 > \sum\limits_{a_1+...+a_t=n, a_t\neq 1} \frac{1}{[a_1...a_t][[a_1...a_{t-1}]} > \sum\limits_{a_1+...+a_t=n, a_t\neq 1} \frac{1}{(a_t+1)[a_1...a_{t-1}]^2} =$
$= \sum\limits_{a_t=2}^{n-1} \frac{1}{a_t+1} \sum\limits_{a_1+...+a_{t-1}=n-a_t} \frac{1}{[a_1...a_{t-1}]^2} = \sum\limits_{a_t=2}^{n-1} \frac{2\sigma'(n-a_t)}{a_t+1}$ □

Теорема 1. $\liminf\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = 0$

Доказательство. Очевидно из леммы 2, что достаточно доказать то же самое для $\sigma'(n)$. Предположи противное, то есть что $\exists\varepsilon$ такое, что начиная с некоторого $N : \forall n > N, \sigma'(n) > \varepsilon$,тогда по лемме 3 $\sum\limits_{a_t=2}^{n-1} \frac{2\sigma'(n-a_t)}{a_t+1} >$ $\sum\limits_{a_t=N}^{n-1} \frac{2\varepsilon}{a_t+1} \to \infty$, при $n \to \infty$. Противоречие. Теорема доказана. □

Часть 4. Другое представление задачи. Множества $\mathcal{C}_n$

Определим множество $\mathcal{C}_1$ - отрезок $[\frac{1}{2}, 1]$ и отображения $u_0(x) = \frac{x}{1+x}, [0,1] \to [0, \frac{1}{2}]$ и $u_1(x) = \frac{1}{1+x} = 1-u_0(x), [0,1] \to [\frac{1}{2}, 1]$. Определим также $T(x) = u_0(x)\cup u_1(x), [0,1] \to [0,1]$

Лемма 4. $\mathcal{C}_n = T^{n-1}(\mathcal{C}_1)$ - есть определенное выше множество "маленьких отрезков"n-го уровня т.е. отрезков вида $[\frac{[a_2...a_t]}{[a_1...a_t]}, \frac{[a_2...a_t-1]}{[a_1...a_t-1]}], \sum\limits_{i=1}^{t} a_i = n+1$

Доказательство. Поскольку из свойства 3) разбиения Фарея очевидно следует, что множества маленьких отрезков симметричны относительно точки $\frac{1}{2}$, а $u_0(x) + u_1(x) = 1$, достаточно по индукции доказать, что множество маленьких отрезков n-го уровня переходит во множество маленьких отрезков $n+1$-го уровня, лежащих внутри отрезка $[0,1]$ поскольку отрезков $n+1$-го уровня в 2 раза больше, то отображение будет биективным. И так, пусть у нас есть отрезок с концами $[\frac{[a_2...a_t]}{[a_1...a_t]}, \frac{[a_2...a_t-1]}{[a_1...a_t-1]}]$ первый конец под действием отображения перейдет в $\frac{[a_2...a_t]}{1+\frac{[a_2...a_t]}{[a_1...a_t]}} = \frac{[a_2...a_t]}{[a_2...a_t]+[a_1...a_t]} = \frac{[a_2...a_t]}{[a_t...a_2]+[a_t...a_1]} = \frac{[a_2...a_t]}{[a_t...a_1+1]} = \frac{[a_2...a_t]}{[a_1+1...a_t]}$, аналогично второй конец перейдет в $\frac{[a_2...a_t-1]}{[a_1+1...a_t-1]}$, получившийся отрезок, очевидно, лежит на $n+1$-ом уровне, что и требовалось доказать. □

Часть 5. Операторная инвариантность. Монотонность $\sigma(n)$
Введем оператор $\hat{T}$ на пространстве функций с носителем $[0,1]$.
$\hat{T}(g(x)) = \frac{g(u_0(x))+xg(u_1(x))}{1+x}$. Пусть, также $\mathcal{D}$ - пространство функций $g(x)$ с носителем $[0,1]$ таких, что $g' \geq 0, g'' \leq 0$, тогда верно следующее:

Лемма 5. Если $g \in \mathcal{D}$, то $\hat{T}(g(x)) \in \mathcal{D}$

Доказательство. Пользуясь монотонностью $g(x)$ и $g'(x)$, получаем:
$$\hat{T}\left(g\right)'(x) = \underbrace{\frac{g'\left(\frac{x}{x+1}\right) - xg'\left(\frac{1}{x+1}\right)}{(x+1)^3}}_{>0} + \underbrace{\frac{g\left(\frac{1}{x+1}\right) - g\left(\frac{x}{x+1}\right)}{(x+1)^2}}_{>0}$$
Аналогичные вычисления для второй производной показывают:
$\hat{T}\left(g\right)''(x) = \frac{g''\left(\frac{x}{x+1}\right)+xg''\left(\frac{1}{x+1}\right)}{(x+1)^5} + \frac{2\left(g\left(\frac{x}{x+1}\right)-g\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)}{(x+1)^3} + \frac{2(x+1)\left((x-1)g'\left(\frac{1}{x+1}\right)-2g'\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)}{(x+1)^5} \leq 0,$
что и требовалось доказать. □

Далее докажем основное свойство оператора, ради которого мы его, собственно, и вводили. Рассмотрим меру $d\mu = \frac{dx}{x}$.

Лемма 6. $\int\limits_{\mathcal{C}_{n+1}} g(x)d\mu = \int\limits_{\mathcal{C}_n} \hat{T}(g(x))d\mu$

Доказательство. Напомним, что $T(\mathcal{C}_n) = \mathcal{C}_{n+1}$, где $T(x) = u_0(x) \cup u_1(x)$. Воспользуемся тогда заменой переменной для первого интеграла. Следует обратить внимание, что $u_1(x)$ "переворачивает"отрезок $[0,1]$, так что при замене необходимо не забыть поменять знак перед интегралом.
$\int\limits_{\mathcal{C}_{n+1}} g(x)d\mu = \int\limits_{\mathcal{C}_{n+1}} \frac{g(x)}{x}dx = \int\limits_{\mathcal{C}_n} \frac{g(u_0(x))}{u_0(x)}du_0(x) + \int\limits_{\mathcal{C}_n} \frac{g(u_1(x))}{u_1(x)}du_1(x) = \int\limits_{\mathcal{C}_n} \frac{g(u_0(x))}{x/(1+x)}\frac{1}{(1+x)^2}dx +$
$+ \int\limits_{\mathcal{C}_n} \frac{g(u_1(x))}{1/(1+x)}\frac{1}{(1+x)^2}dx = \int\limits_{\mathcal{C}_n} \frac{g(u_0(x))}{x(1+x)}dx + \int\limits_{\mathcal{C}_n} \frac{xg(u_1(x))}{x(1+x)}dx = \int\limits_{\mathcal{C}_n} \hat{T}(g(x))d\mu,$
что и требовалось доказать. □

Таким образом мы получаем, что $\int\limits_{\mathcal{C}_n} g(x)d\mu = \int\limits_{\mathcal{C}_1} \hat{T}^{n-1}(g(x))d\mu = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \hat{T}^{n-1}(g(x))\frac{dx}{x}$.
Следующая лемма совершенно тривиальна, но несмотря на это, очень пригодится нам в дальнейшем:

Лемма 7. $\hat{T}(g(1)) = g(\frac{1}{2})$

Доказательство. $\hat{T}(g(1)) = \frac{g(u_0(1))+g(u_1(1))}{2} = \frac{2g(1/2)}{2} = g(1/2)$, что и требовалось доказать. □

Докажем еще одно чрезвычайно важное свойство оператора $\hat{T}$:

Лемма 8. Если $g(x) \in \mathcal{D}$, определенная на $\mathcal{C}_1$, то $\hat{T}^n(g(x) \leq \hat{T}^{n-1}(g(x))$

Доказательство. В доказательстве мы пользуемся леммой 5) т.е. тем, что оператор $\hat{T}$ сохраняет монотонность, а также леммой 7).
$\hat{T}^n(g(x)) \le \max\left\{\hat{T}^n(g(x)) : x \in \mathcal{C}_1\right\} = \hat{T}^n(g(1)) = \hat{T}^{n-1}(g(\frac{1}{2})) =$
$= \min\left\{\hat{T}^{n-1}(g(x)) : x \in \mathcal{C}_1\right\} \le \hat{T}^{n-1}(g(x))$ □

Теперь у нас есть все, чтобы сформулировать и доказать теорему 2.

Теорема 2. $\sigma(n+1) \le \sigma(n)$

Доказательство. Пусть λ - стандартная мера Лебега (или Жордана), а функция $\varphi(x) = x, [0,1] \to [0,1]$, при этом $\varphi(x)$, очевидно, лежит в $\mathcal{D}$. По лемме 4) $\lambda(\mathcal{C}_n) = \sigma(n)$. С другой стороны, $\lambda(\mathcal{C}_{n+1}) = \int\limits_{\mathcal{C}_{n+1}} dx =$
$\int\limits_{\mathcal{C}_{n+1}} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int\limits_{\mathcal{C}_{n+1}} \varphi(x) d\mu = \int\limits_{\mathcal{C}_1} \hat{T}^n(\varphi(x)) d\mu \le \int\limits_{\mathcal{C}_1} \hat{T}^{n-1}(\varphi(x)) d\mu = \int\limits_{\mathcal{C}_n} \varphi(x) d\mu = \lambda(\mathcal{C}_n)$,
где четвертое и пятое равенство следуют из леммы 6), а неравенство - из леммы 8). Теорема доказана. □

Следствие 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(n) = 0$

Доказательство. Утверждение очевидно следует из теорем 1) и 2). □

Часть 6. Асимптотика $\sigma(n)$ и $\sigma^{'}(n)$ В части 2 у нас было тождество: $\sum\limits_{a_1+\ldots+a_t=n, a_t\neq 1} \frac{1}{[a_1\ldots a_t][[a_1\ldots a_t-1]} + \frac{1}{[a_1\ldots a_t][[a_1\ldots a_{t-1}]} = 1$, поскольку второе слагаемое по следствию 1) стремится к 0 с ростом n, верно следующее утверждение:
$\forall \varepsilon > 0 \exists n : \sum\limits_{a_1+\ldots+a_t=n, a_t\neq 1} \frac{1}{[a_1\ldots a_t][a_1\ldots a_t-1]} > 1-\varepsilon$, отсюда мы можим получить следующую лемму:

Лемма 9. $\forall \varepsilon > 0 \exists n : \sum\limits_{a=2}^{n-1} \frac{\sigma^{'}(n-a)}{a} > \frac{1}{2} - \varepsilon$

Доказательство. Аналогично лемме 3)
$1-\varepsilon < \sum\limits_{a_1+\ldots+a_t=n, a_t\neq 1} \frac{1}{[a_1\ldots a_t][[a_1\ldots a_{t-1}]} < \sum\limits_{a_1+\ldots+a_t=n, a_t\neq 1} \frac{1}{a_t[a_1\ldots a_{t-1}]^2} =$
$= \sum\limits_{a_t=2}^{n-1} \frac{1}{a_t} \sum\limits_{a_1+\ldots+a_{t-1}=n-a_t} \frac{1}{[a_1\ldots a_{t-1}]^2} = \sum\limits_{a_t=2}^{n-1} \frac{2\sigma^{'}(n-a_t)}{a_t}$, что и требовалось доказать.

□

Теорема 3. Для почти всех n выполняется следующее: $\frac{c_1}{\log(n)} < \sigma(n) < \frac{c_2}{\log(n)}$, где констатнты c_1 и c_2 можно явно оценить.

Доказательство. Докажем сначала второе неравенство.Воспользуемся монотонностью $\sigma(n)$. $1 > \sum\limits_{a=2}^{n-1} \frac{2\sigma^{'}(n-a)}{a+1} > \sum\limits_{a=2}^{n-1} \frac{\sigma(n-a)}{a+1} > \sum\limits_{a=2}^{n-1} \frac{\sigma(n)}{a+1} \sim \sigma(n)\log(n)$
Таким образом, $\sigma(n) < \frac{1}{\log(n)}$.
Докажем первое неравенство. Пусть, напротив, для любого $c > 0$ бесконечно много раз выполняется $\sigma(n) < \frac{c}{\log(n)}$, это означает, что от $\forall k$ такого, что $n \leq k \leq n^2$ верно следующее $\sigma(k) < \sigma(n) < \frac{c}{\log(n)}$ Далее по лемме 3), где $\varepsilon = \frac{1}{6}$, для всех достаточно больших n верно $\frac{1}{3} < \sum\limits_{a=2}^{n^2-1} \frac{\sigma^{'}(n^2-a)}{a} < \sum\limits_{a=2}^{n^2-1} \frac{\sigma(n^2-a)}{a}$, где n берется из условия выше. $\sum\limits_{a=2}^{n^2-1} \frac{\sigma(n^2-a)}{a} = \sum\limits_{a=2}^{n^2-n} \frac{\sigma(n^2-a)}{a} + \sum\limits_{a=n^2-n}^{n^2-1} \frac{\sigma(n^2-a)}{a} < \sum\limits_{a=2}^{n^2-n} \frac{c}{a\log(n)} + \sum\limits_{a=n^2-n}^{n^2-1} \frac{1}{a} \sim 2c + O(\frac{1}{n})$ При $c < \frac{1}{6}$ получаем противоречие. Теорема полностью доказана. □

Следствие 2. Утверждение теоремы 3) верно и для $\sigma^{'}(n)$

Доказательство. Утверждение очевидно следует из леммы 2) □