0.1 Трансцендентность π.

В 1893г. Эрмит исследовал еще одно тождество с экспоненциальной функцией, дающее в некотором смысле дуальную к варианту, изложенному в параграфе 1, конструкцию приближений. Мы используем эту конструкцию для доказательства следующего утверждения.

Теорема 0.1. *Число π трансцендентно.*

Пусть m и n натуральные числа. Положим

$$N+1=(m+1)(n+1), \qquad Q(x)=\prod_{k=0}^{m}(x-k)^{n+1}.$$

Лемма 0.1. *1. Справедливо тождество*

$$R_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{z\zeta}d\zeta}{\zeta^{n+1}(\zeta-1)^{n+1}\cdots(\zeta-m)^{n+1}}=\sum_{k=0}^{m}P_k(z)e^{kz}, \tag{1}$$

где C есть окружность с центром в точке $\zeta=0$, содержащая внутри все точки $0,1,\ldots,m$ и для каждого $k, 0\le k\le m$, коэффициент $P_k(z)$ есть многочлен от z степени не выше n.

2. Коэффициенты многочленов $P_k(z)$ есть рациональные числа, ограниченные сверху величиной 2^N, целое число $n!q^N$, где q — наименьшее общее кратное чисел $1,2,\ldots,m$ есть общий знаменатель всех коэффициентов $P_k(z)$.

Доказательство. Правая часть тождества (1) есть сумма вычетов функции, стоящей под интегралом в его левой части, в точках $0,1,\ldots,m$. Действительно,

$$R_n(z)=\sum_{k=0}^{m}Res_{\zeta=k}\frac{e^{z\zeta}}{Q(\zeta)}=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{n!}\,\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(e^{zx}\frac{(x-k)^{n+1}}{Q(x)}\right)\Big|_{x=k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\frac{z^{n-j}e^{kz}}{(n-j)!j!}\left(\frac{d}{dx}\right)^j\left(\frac{(x-k)^{n+1}}{Q(x)}\right)\Big|_{x=k}.$$

так что

$$P_k(z)=\sum_{j=0}^{n}a_{kj}\frac{z^{n-j}}{(n-j)!}, \tag{2}$$

где

$$a_{kj}=\frac{1}{j!}\left(\frac{d}{dx}\right)^j\left(\frac{(x-k)^{n+1}}{Q(x)}\right)\Big|_{x=k}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-k|=\frac{1}{2}}\frac{(\zeta-k)^{n-j}d\zeta}{Q(\zeta)}. \tag{3}$$

Заметим, что числа a_{kj} определены нами при всех целых j, k с условиями $j \geq 0$ и $0 \leq k \leq m$. Из этого определения следует, что

$$\frac{(x-k)^{n+1}}{Q(x)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j}(x-k)^j. \tag{4}$$

Подставим в это тождество $x = k + qt$, где q – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, m$. Тогда (4) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{\prod\limits_{\substack{\ell=0 \\ \ell \neq k}}^{m} (k-\ell+qt)^{n+1}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} q^j t^j. \tag{5}$$

Учитывая, что

$$\frac{q}{k-\ell+qt} = \frac{q}{k-\ell} \cdot \frac{1}{1-\frac{q}{\ell-k}t} = -\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{q}{\ell-k}\right)^{i+1} t^i,$$

т.е. функция $\frac{q}{k-\ell+qt}$ раскладывается в точке $t = 0$ в ряд Тейлора с целыми коэффициентами, заключаем с помощью (5), что ряд $q^{N-n} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{k,j} q^j t^j$ имеет целые коэффициенты. Поэтому $q^{N-n+j} a_{k,j} \in \mathbb{Z}$ и, значит,

$$q^N \cdot a_{k,j} \in \mathbb{Z}, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{6}$$

Для оценки коэффициентов a_{kj} сверху воспользуемся вторым равенством (3). Учитывая, что на контуре интегрирования выполняется равенство $|z-k| = \frac{1}{2}$, а при любом $\ell \neq k$ неравенства $|z-\ell| \geq \frac{1}{2}$, находим

$$|a_{kj}| \leq \frac{1}{2^{n-j+1}} 2^{N+1} = 2^{N-n+j}.$$

Таким образом,

$$|a_{k,j}| \leq 2^N, \qquad k = 0, 1, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Это завершает доказательство леммы. □

Следующее утверждение позволит нам оценить сверху и снизу интеграл $R_n(z)$.

Лемма 0.2. *Пусть m - натуральное и $\alpha \neq 0$ - комплексное числа. Тогда при $n \longrightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$R_n(\alpha) = (2\pi N)^{-1/2} e^{\frac{m\alpha}{2}} N^{-N} e^N \alpha^N (1 + o(1)),$$

где $N = (m+1)(n+1) - 1$.

Доказательство. Сделаем в интеграле $R_n(\alpha)$ замену переменной интегрирования ζ, положив $\zeta = \alpha^{-1}\tau$. После этого получим равенство

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\alpha^N \int_{C'} \frac{e^\tau d\tau}{\tau^{n+1}(\tau-\alpha)^{n+1}\cdots(\tau-m\alpha)^{n+1}}.$$

Положим при достаточно большом n радиус окружности C' в последней формуле равным N. Здесь и далее слова "достаточно большой"означают "превосходящий некоторую величину, зависящую от α и m". В частности, будем считать n столь большим, что окружность C' содержит внутри все точки $\alpha, 2\alpha, \ldots, m\alpha$. Тогда для $\tau = Ne^{i\varphi}$ имеем $d\tau = Nie^{i\varphi}d\varphi$, и

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\alpha^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{Ne^{i\varphi}}(Ne^{i\varphi})^{-N} b_n(\varphi)d\varphi,$$

где $b_n(\varphi) = \prod_{j=1}^m \left(1 - j\alpha N^{-1}e^{-i\varphi})\right)^{-n-1}$. Имеем при достаточно большом n

$$b_n(\varphi) = \exp\left((n+1)\sum_{j=1}^m \frac{j\alpha}{N}e^{-i\varphi} + O(n^{-1})\right) = \exp\left(\frac{m\alpha}{2}e^{-i\varphi}\right) + O(n^{-1}), \qquad (8)$$

где постоянная в $O(n^{-1})$ зависит только от α, m и не зависит от φ.

Справедливо представление

$$R_n(\alpha) = N^{-N}e^N\alpha^N F_n, \qquad (9)$$

где

$$F_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{N(e^{i\varphi}-1-i\varphi)} b_n(\varphi)d\varphi.$$

Обозначим $\lambda_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ и

$$G_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{N(e^{i\varphi}-1-i\varphi)} b_n(\varphi)d\varphi.$$

Справедливы неравенства

$$\Re\left(e^{i\varphi} - 1 - i\varphi\right) = \cos\varphi - 1 \le \begin{cases} -\frac{\varphi^2}{\pi}, & \text{если } |\varphi| \le \frac{\pi}{2}, \\ -1, & \text{если } \frac{\pi}{2} \le |\varphi| \le \pi. \end{cases}$$

Для доказательства первого из них достаточно проверить, что функция $1 - \cos\varphi - \frac{\varphi^2}{\pi}$ имеет на отрезке $|\varphi| \le \frac{\pi}{2}$ минимум в точке $\varphi = 0$ и этот минимум равен нулю. Второе неравенство очевидно. Тогда при $\frac{\pi}{2} \ge |\varphi| \ge \lambda_n$ находим

$$\Re\left(e^{i\varphi} - 1 - i\varphi\right) \le -\frac{\varphi^2}{\pi} \le -\frac{\ln^2 n}{\pi n}. \qquad (10)$$

Так как $\frac{\ln^2 n}{\pi n} < 1$ уже при $n \geq 1$, то имеем

$$\Re\left(e^{i\varphi} - 1 - i\varphi\right) \leq -\frac{\ln^2 n}{\pi n} \quad \text{на множестве} \quad \lambda_n \leq |\varphi| \leq \pi. \tag{11}$$

В силу (8) и (11) при достаточно большом n имеем

$$|F_n - G_n| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\pi \geq |\varphi| \geq \lambda_n} e^{-N\frac{\ln^2 n}{\pi n}} |b_n(\varphi)| d\varphi \leq \exp\left(-\frac{m}{4}\ln^2 n\right).$$

При $|\varphi| \leq \lambda_n$ находим

$$N\left(e^{i\varphi} - 1 - i\varphi\right) = N\left(-\frac{\varphi^2}{2} + O(\varphi^3)\right) = -\frac{N\varphi^2}{2} + O(n^{-\frac{1}{2}}\ln^3 n),$$

и, значит,

$$e^{N\left(e^{i\varphi}-1-i\varphi\right)} = e^{-\frac{N\varphi^2}{2}} + O(n^{-\frac{1}{2}}\ln^3 n), \tag{12}$$

Кроме того из (8) следует

$$b_n(\varphi) = e^{\frac{m\alpha}{2}} + O(n^{-\frac{1}{2}}\ln n). \tag{13}$$

Обозначим для краткости

$$x_1 = e^{N\left(e^{i\varphi}-1-i\varphi\right)}, \quad x_2 = b_n(\varphi), \quad y_1 = e^{-\frac{N\varphi^2}{2}}, \quad y_2 = e^{\frac{m\alpha}{2}}.$$

При $|\varphi| \leq \lambda_n$ справедливы неравенства

$$|x_1x_2 - y_1y_2| \leq |x_2| \cdot |x_1 - y_1| + |y_1| \cdot |x_2 - y_2| \leq c_1\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}, \tag{14}$$

где c_1 - постоянная, зависящая только от m и α. Здесь использовались равенства (12) и (13), а также неравенства $|y_1| \leq 1$ и $|x_2| \leq e^{m|\alpha|}$. Последнее справедливо при всех достаточно больших n.

С помощью (14) получаем оценку

$$\left|G_n - \frac{1}{2\pi}e^{\frac{m\alpha}{2}}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} e^{-\frac{N\varphi^2}{2}} d\varphi\right| \leq c_1\frac{\ln^3 n}{\sqrt{n}}\int_{-\lambda_n}^{\lambda_n} d\varphi \leq 2c_1\frac{\ln^4 n}{n}. \tag{15}$$

Сделаем в первом интеграле из (15) замену переменной интегрирования $\varphi = t/\sqrt{N}$. В результате получится

$$G_n = \frac{1}{2\pi}e^{\frac{m\alpha}{2}}N^{-\frac{1}{2}}\int_{-\lambda_n N^{\frac{1}{2}}}^{\lambda_n N^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + O\left(\frac{\ln^4 n}{n}\right) = \frac{1}{2\pi}e^{\frac{m\alpha}{2}}N^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt(1 + o(1)).$$

Как известно, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$, поэтому $G_n = (2\pi N)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{m\alpha}{2}\right)(1+o(1))$, откуда следует, что

$$F_n = G_n + (F_n - G_n) = (2\pi N)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{m\alpha}{2}}(1+o(1)) + O(e^{-\frac{m}{3}\ln^2 n} = (2\pi N)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{m\alpha}{2}}(1+o(1)).$$

Подставляя это выражение в равенство (9), приходим к утверждению леммы 0.2. $\square$

Доказательство теоремы 0.1. Предположим, что число π алгебраическое. Тогда алгебраическим будет и число $\alpha = 2\pi i$. Обозначим степень его буквой m и выберем достаточно большое по сравнению с m и α целое число n. Учитывая, что $e^{\alpha} = 1$, и воспользовавшись леммой 0.1 при $z = \alpha = 2\pi i$, находим

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{m} P_k(\alpha) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{kj}\frac{\alpha^{n-j}}{(n-j)!}.$$

Определим также многочлен $A_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ равенством

$$A_n(x) = n!q^N \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{kj}\frac{x^{n-j}}{(n-j)!}.$$

Включение $A_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$ сразу же следует из леммы 0.1. Из этой же леммы при достаточно большом n следует оценка сверху для $H(A_n)$ — максимального из модулей коэффициентов многочлена $A_n(x)$, а также и для его степени

$$H(A_n(x)) \le q^N n! 2^N (m+1) \le n!(3q)^N, \qquad \deg A_n(x) \le n.$$

Далее, из леммы 0.2 получаем

$$0 < |A_n(\alpha)| \le q^N n! N^{-N}(e|\alpha|)^N \le e^{-mn\ln n + c_2 n}. \tag{16}$$

Так как $A_n(\alpha) \ne 0$, а α по предположению есть алгебраическое число степени m, находим с помощью теоремы Лиувилля, см. теорему **??**, оценку снизу

$$|A_n(\alpha)| \ge (n!(3q)^N)^{1-m} c^{-n} \ge e^{-(m-1)n\ln n - c_3 n}, \tag{17}$$

Здесь c, c_2, c_3 - положительные величины, зависящие только от m и α.

Верхняя оценка из (16) противоречит оценке снизу из (17) при всех достаточно больших n. Это противоречие завершает доказательство теоремы 0.1. $\square$

Замечания.

1. Из тождества (1) не трудно получить разложение функции $R_n(z)$ в ряд Тейлора. Для этого достаточно разложить функцию $e^{z\zeta}$ в ряд по степеням $z\zeta$ и проинтегрировать ряд, получившийся под интегралом в равенстве (1) почленно по переменной

ζ. В частности, таким способом легко проверить, что ряд Тейлора для $R_n(z)$ начинается с члена $\frac{z^N}{N!}$. К.Л. Зигель первым заметил, что линейная комбинация экспонент с полиномиальными коэффициентами, имеющая большую кратность нуля в точке $z = 0$, т.е. малая в функциональном смысле, будет принимать малые значения в точках, лежащих не далеко от начала координат. Это позволило ему доказать ряд результатов о трансцендентности значений целых гипергеометрических функций с рациональными параметрами.

2. Метод, которым была доказана трансцендентность π, позволяет доказать и более общий факт — теорему Линдемана *о трансцендентности чисел вида e^α при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$*. В общем случае число $\beta = e^\alpha \neq 1$, и значение интеграла $R_n(\alpha)$ из леммы 0.1 представимо в виде многочлена с рациональными коэффициентами от чисел α, β. Предположение об алгебраичности числа β с помощью надлежащего обобщения теоремы Лиувилля на многочлены от двух переменных, как и в случае с числом π позволяет привести в противоречие верхнюю и нижнюю оценки для $R_n(\alpha)$. Из этой теоремы Линдемана следует трансцендентность натуральных логарифмов, а также значений тригонометрических функций в ненулевых алгебраических точках.