

АНДРЕЙ БОРИСОВИЧ ШИДЛОВСКИЙ

(13.08.1915 — 23.03.2007)

А.Б. Шидловский родился в 1915г. в городе Алатыре Чувашской АССР. Его отец Борис Андреевич Шидловский происходил из обедневших дворян Симбирской губернии. После окончания Санкт-Петербургского политехнического института он служил землеустроителем, народным судьей, был членом Коллегии защитников, работал экономистом. Мать - Шидловская (Скороходова) Александра Всеволодовна окончила Симбирскую гимназию и много лет работала машинисткой в различных учреждениях.

А.Б.Шидловский прошел большой и сложный трудовой путь. В 1930г. он окончил 7 классов средней школы в г. Ульяновске. После переезда семьи в Москву и окончания школы ФЗУ он несколько лет работал токарем на заводе. Во время учебы и позже подрабатывал играя в духовом оркестре и даже был его руководителем. В 1934г. по комсомольской мобилизации он направляется на строительство первой очереди Московского метрополитена, где работал проходчиком и изолировщиком. После службы в Советской Армии в 1936-37 годах, он оканчивает вечернюю школу и в 1939г. поступает учиться на механико-математический факультет Московского университета. В самом начале Великой Отечественной войны, 26 июня 1941г., А.Б.Шидловский добровольцем уходит в армию. Свою службу он начал младшим топографом на Брянском фронте, а закончил - командиром батареи самоходных артиллерийских установок в Китае. В 1942г. он вступил в кандидаты, а в 1944г. в члены ВКП(б).

После демобилизации в 1946г. А.Б.Шидловский продолжает по 1950г. учебу на механико-математическом факультете МГУ, в 1953г. заканчивает аспирантуру и в 1954г. защищает кандидатскую диссертацию. Его научным руководителем был А.О. Гельфонд. В годы учебы в Университете и в аспирантуре Андрей Борисович, уже отец троих дочерей, преподает в вечерней школе, читает лекции и ведет практические занятия в техническом ВУЗе. После окончания аспирантуры А.Б.Шидловский работает старшим преподавателем в Московском педагогическом институте им. В.И. Ленина, и затем там же доцентом и профессором по совместительству. В 1954г. по инициативе А.Я. Хинчина он приглашается работать на механико-математический факультет МГУ. С этого времени вся его жизнь связана с Московским университетом. В 1955г. он становится доцентом кафедры математического ана-

лиза. Защитив в 1959г. докторскую диссертацию, он с 1960г. работает профессором кафедры теории чисел. С 1968г., после смерти А.О.Гельфонда, и по 2002г. Андрей Борисович заведует кафедрой теории чисел. За годы работы на механико-математическом факультете МГУ А.Б. Шидловский много лет читал основные курсы математического анализа и теории чисел, специальные курсы по теории чисел, руководил научными семинарами. Им подготовлены 15 кандидатов наук, трое из них защитили докторские диссертации.

Ряд лет он работал заместителем декана механико-математического факультета по учебной работе, был членом Парткома и руководителем партийной организации факультета. Андрей Борисович много лет был членом Ученого Совета механико-математического факультета, членом экспертной комиссии ВАК СССР, членом Московского математического общества. Он награжден тремя орденами и многими медалями.

Научные результаты Андрея Борисовича относятся к теории трансцендентных чисел, основные задачи которой состоят в исследовании иррациональности и трансцендентности различных чисел, и в более общей постановке - в доказательстве отсутствия между ними алгебраических соотношений над полем рациональных чисел \mathbb{Q} . Например, в 1873г. Ш.Эрмит доказал, что число e не является корнем никакого многочлена с рациональными коэффициентами, т.е. трансцендентно. В 1882г. Ф.Линдеман обобщил это утверждение доказав, что при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$ значение экспоненциальной функции e^α трансцендентно. Отсюда при $\alpha = \pi i$ следует трансцендентность π . Еще один классический пример - седьмая проблема Гильберта о трансцендентности чисел вида α^β при алгебраических $\alpha \neq 0, 1$ и $\beta \notin \mathbb{Q}$. Эта проблема была решена в 1934г. А.О. Гельфондом и независимо от него Т. Шнейдером. В частности, это утверждение означает трансцендентность числа $e^\pi = (-1)^{-i}$.

Первая, еще студенческая, работа А.Б. Шидловского, выполненная под непосредственным влиянием А.О. Гельфонда, посвящена исследованию количественных характеристик трансцендентности чисел вида α^β . Впоследствии Андрей Борисович полностью переключился на тематику, связанную с обобщением результатов Эрмита и Линдемана.

Нужно сказать, что попытки обобщения этих результатов предпринимались сразу же после их доказательства. Функция $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ принадлежит к классу так называемых конфлюентных гипергеометрических функций

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}, \quad p \leq q. \quad (1)$$

Здесь $(a)_0 = 1$, и $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ при $n \geq 1$. Частичные результаты об арифметических свойствах значений таких функций при рациональном z и рациональных значениях параметров a_j, b_j получили А.Лежандр, А.Гурвиц, Е.Стридсберг, В.Майер. В 1929г. К.Л. Зигель выделил существенные для исследования трансцендентности значений таких функций свойства (алгебраичность коэффициентов ряда Тейлора, рост коэффициентов и их общих знаменателей, наличие дифференциальных уравнений) и, постулировав их, определил некоторый общий класс функций, названных им Е-функциями. Функция e^z , с которой связано название, и все функции (1) при рациональных a_j, b_j принадлежат к классу Е-функций. Зигель предложил некоторый подход для исследования алгебраической независимости значений таких функций. Впрочем, сам он смог получить завершённые результаты лишь для совокупностей функций вида (1) при $q = 1$.

Программа, намеченная Зигелем, была полностью реализована в серии работ А.Б. Шидловского. Ему удалось доказать ряд фундаментальных теорем, до конца решающих проблемы трансцендентности и алгебраической независимости значений в алгебраических точках Е-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям. Приведем здесь одну из теорем А.Б. Шидловского, доказанную им в 1954г.

Теорема 1. Пусть совокупность Е-функций

$$f_1(z), \dots, f_m(z), \quad m > 1, \quad (2)$$

является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_k = Q_{k,0}(z) + \sum_{i=1}^m Q_{k,i}(z)y_i, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где $Q_{k,i}(z) \in \mathbb{C}(z)$, а α - любое алгебраическое число, отличное от 0 и особых точек системы (3). Тогда для того, чтобы числа

$$f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$$

были алгебраически независимы над \mathbb{Q} , необходимо и достаточно, чтобы функции (2) были алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство алгебраической независимости решений линейных дифференциальных уравнений представляет собой достаточно сложную задачу,

во многих случаях не решенную. Однако теорема 1 принципиально исчерпывает теоретико-числовую часть исследования арифметических свойств значений E-функций в алгебраических точках, сводя в общем случае арифметическую проблему к аналитической - доказательству алгебраической независимости функций.

Простейший пример для применения этой теоремы составляет набор функций $e^{a_1 z}, \dots, e^{a_m z}$. При алгебраических a_j , линейно независимых над \mathbb{Q} эти функции принадлежат к классу E-функций и алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. С $\alpha = 1$ из теоремы 1 следует так называемая теорема Линдемана-Вейерштрасса, утверждающая, что в указанных выше условиях числа

$$e^{a_1}, \dots, e^{a_m}$$

алгебраически независимы над \mathbb{Q} .

С помощью теоремы 1 А.Б. Шидловскому удалось впервые получить результаты о трансцендентности и алгебраической независимости значений гипергеометрических функций (1), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям произвольных порядков, распространить идеи Зигеля на случай E-функций, удовлетворяющих неоднородным дифференциальным уравнениям, а также на мероморфные функции, представимые отношениями E-функций. Простота условий теоремы 1 позволила получить многочисленные конкретные приложения. Укажем здесь лишь один пример. Пусть

$$\psi_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{kn}}{(n!)^k}, \quad k \geq 1.$$

Тогда при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$, любая конечная совокупность чисел вида

$$\psi_k^{(\ell)}(\alpha), \quad k \geq 1, \quad 0 \leq \ell < k,$$

алгебраически независима.

А.Б. Шидловский обобщил теорему 1 на случай алгебраически зависимых E-функций. Ему удалось доказать в общем случае равенство

$$\text{tr deg}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = \text{tr deg}_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}(f_1(z), \dots, f_m(z))$$

и в ряде работ получить достаточные условия, обеспечивающие алгебраическую независимость значений $f_1(\alpha), \dots, f_\ell(\alpha)$, $\ell < m$, если E-функции $f_1(z), \dots, f_\ell(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Теорема 1 дала возможность получить количественные характеристики алгебраической независимости значений E -функций в виде оценок так называемых мер алгебраической независимости. Эти результаты были получены в работах С.Ленга, самого А.Б. Шидловского, А.И. Галочкина. Они обобщили соответствующие оценки Зигеля, доказанные им в частном случае. Для E -функций с коэффициентами рядов из поля рациональных чисел или мнимого квадратичного поля А.Б. Шидловскому удалось получить практически неулучшаемые количественные результаты.

Общие теоремы А.Б. Шидловского стимулировали развитие методов доказательства алгебраической независимости решений линейных дифференциальных уравнений над $\mathbb{C}(z)$. Этой тематике посвящен ряд работ самого Андрея Борисовича, а также статьи его учеников И.И. Белогривова, В.А. Олейникова, Ю.В. Нестеренко, В.Х. Салихова и других. В связи с приложениями в теории трансцендентных чисел алгебраическая независимость решений линейных дифференциальных уравнений исследовалась в работах К. Малера, К.Ваананена, Ф.Бейкерса, В.Д.Броунвелла и Г.Хекмана. Были также инициированы исследования по вычислению групп Галуа гипергеометрических дифференциальных уравнений (Ф. Бейкерс).

Доказательство теоремы 1 опиралось на очень точные оценки кратности нуля в фиксированной точке которую может иметь линейная форма

$$R(z) = P_0(z) + P_1(z)f_1(z) + \cdots + P_m(z)f_m(z), \quad P_j(z) \in \mathbb{C}[z], \quad (4)$$

в зависимости от степеней многочленов $P_j(z)$. Этот подход оказал весьма сильное воздействие на развитие теории трансцендентных чисел. Перенесенный на функции, удовлетворяющие алгебраическим дифференциальным уравнениям, он позволил доказать результаты о мере трансцендентности значений эллиптических функций (Д.Броунвелл и Д. Массер) и исследовать арифметические свойства значений модулярных форм. В частности, эти идеи оказались принципиально важными для доказательства алгебраической независимости чисел π и e^π (Ю.В. Нестеренко). Оценки числа нулей многочленов на алгебраических группах позволили достичь существенного прогресса в доказательствах оценок степени трансцендентности полей, порожденных значениями показательной и эллиптической функций (П. Филиппон, М. Вальдшмидт, Г. Диас). Наилучшие в настоящее время оценки линейных форм от логарифмов алгебраических чисел получены с использованием оценок числа нулей многочленов на алгебраических группах (А.Бейкер, Г.Вюстхольц, Е.М. Матвеев). Были разработаны иные подходы для оценки кратности нуля линейной формы (4) (Д. Бертран, Ф.Бейкерс).

Идеи А.Б. Шидловского использовались для исследования других классов функций и прежде всего так называемых G - функций. Этот класс функций был введен Зигелем в 1929г. Типичным примером здесь служат гипергеометрические функции с рациональными параметрами и конечным радиусом сходимости (М.С. Нурмагомедов, А.И.Галочкин, Г.Чудновский). Класс так называемых F - функций был исследован В.Г. Чирским.

Результаты А.Б. Шидловского хорошо известны среди специалистов как в нашей стране, так и за рубежом. Его книги переводились на иностранные языки. Он неоднократно выезжал за рубеж, участвуя в различных международных конференциях по теории чисел.

Исследования арифметических свойств значений E -функций интенсивно продолжаются и сейчас. В 2000г. Д.Бертран опубликовал новое доказательство теоремы 1, основанное на использовании так называемых интерполяционных детерминантов. В 2004г. Ф. Бейкер доказал старую гипотезу Зигеля о линейной независимости значений E -функций. Можно уверенно утверждать, что идеи, внесенные в теорию трансцендентных чисел Андреем Борисовичем Шидловским, и созданная им теория успешно живут и развиваются в работах российских и зарубежных математиков.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ А.Б. ШИДЛОВСКОГО

1951

1. Об оценке меры трансцендентности одного подкласса чисел вида a^b , Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1951. С. 17-28.

1954

2. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов, ДАН СССР. 1954. Т. 96, С. 697-700.

1955

3. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций, ДАН СССР. 1955. Т. 100, С. 221-224.
4. О трансцендентных числах некоторых классов, ДАН СССР. 1955. Т.103, С. 977-980.
5. О трансцендентности значений одного класса целых функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям, ДАН СССР. 1955 Т. 105, С. 35-37.

1956

6. О новом критерии трансцендентности и алгебраической независимости значений одного класса целых функций, ДАН СССР. 1956. Т. 106, С. 399-400.
7. Об алгебраической независимости трансцендентных чисел одного класса, ДАН СССР. 1956. Т. 108, С. 400 -403.
8. Об одном классе трансцендентных чисел, Труды III Всесоюзного матем. съезда. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 15-16.

1959

9. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций, Изв.АН СССР. Сер.матем. 1959. Т. 23, С. 35-66.
10. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов, Учен. зап. Моск. ун-та. 1959. Вып. 186, матем. 9. С. 11-70.

11. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых функций, Труды Моск. матем. об-ва. 1959. Т. 8. С. 283-320. Поправка: Труды Моск. матем. об-ва, 1961. Т.10. С. 438.

1960

12. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E - функций, связанных алгебраическим уравнением в поле рациональных функций, Вестн. Моск ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1960. С. 19-28.

1961

13. Об одном обобщении теоремы Линдемана 11 ДАН СССР. 1961. Т. 138, N26. С. 1301-1304.
14. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E -функций // Вестн. Моск ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1961. N25. С. 19-28.

1962

15. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E -функций, связанных любым числом алгебраических уравнений в поле рациональных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1962. Т. 26, N26. С. 877-910.

1964

16. Трансцендентность значений E -функций // Труды IV Всесоюз. матем. съезда. Т. 2. Л.: Наука, 1964. С. 147-158.

1966

17. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E -функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка // ДАН СССР. 1966. Т. 169, N21. С. 42-45.
18. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E -функций // Тезисы докладов по приглашению Международного конгресса математиков. М.: Мир, 1966. С. 177-180.
19. Трансцендентность значений некоторых классов функции // Лит. матем. сб. 1966. Т. 6, N21. С. 129-130.
20. К общей теореме об алгебраической независимости значений E -функций // ДАН СССР. 1966. Т. 171, N24. С. 810-813.

1967

21. Об оценке меры трансцендентности значений E-функций // УМН. 1967. Т. 22, N23. С. 245-246.
22. Александр Осипович Гельфонд (к 60-летию со дня рождения) // УМН. 1967. Т. 22, N23. С. 247-256 (Совм. с И.И. Пятецким-Шапиро).
23. Развитие и современное состояние теории трансцендентных чисел // УМН. 1967. Т. 22, N23. С. 3-81 (Совм. с Н.И. Фельдманом).
24. Об оценках меры трансцендентности значений E-функций // Матем. заметки. 1967. Т. 2, N21. С. 33-44.
25. Об оценках меры трансцендентности значений E-функций // Резюме докладов Второго съезда болгарских математиков. Варна: Изд-во Болгарской АН, 1967. С. 91.
26. Александр Осипович Гельфонд (к 60-летию со дня рождения) // Вестн. Моск ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1967. N23. С. 106-108 (Совм. с Н.И. Фельдманом).

1968

27. Трансцендентность и алгебраическая независимость значений E-функций // Труды Международного конгресса математиков. 1966. М.: Мир, 1968. С. 299-307.
28. Об алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // Труды Моск матем. об-ва. 1968. Т. 18. С. 55-64.
29. Об арифметической природе значений одного класса функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям // Материалы республиканского симпозиума по дифференциальным уравнениям. Одесса: Изд-во Одесского ун-та, 1969. С. 75-76.
30. А.О. Гельфонд (Некролог) // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1969. 3V B.: С.1.
31. Об одной теореме К. Зигеля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1969, С. 39-42.
32. А.О. Гельфонд (Некролог) // Математика в школе. 1969. С. 89-90 (Совм. с А.А. Бухштабом).

1970

33. Методы А.О. Гельфонда в теории трансцендентных чисел // УМН. 1970. Т. 25, С. 201-202 (Совм. с Н.И. Фельдманом).

1971

34. Alexander O. Gelfond (Некролог) // Acta Arithmetica. 1971. У. 17. Р. 315-336. (Совм. с Б.В. Левиным и Н.И. Фельдманом).

1972

35. Некоторые нерешенные задачи теории трансцендентных чисел // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по актуальным вопросам теории чисел. Самарканд: Изд-во Самаркандского ун-та, 1972. С. 90.
36. Об арифметических свойствах значений аналитических функций некоторых классов // Резюме докладов Третьего съезда болгарских математиков. Варна: Изд-во Болгарской АН, 1972. Т. 1. С. 218.
37. О работах П.Л. Чебышева по теории чисел // Проблемы истории математики и механики. Вып. 2. М.: Изд-во Моск ун-та, 1972. С. 4-9.

1973

38. Об арифметических свойствах значений аналитических функций // Труды Международной конференции по теории чисел. М.: 1971. Труды Матем. ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. 1973. Т. 132. С. 169-202.

1974

39. К проблеме трансцендентности значений E-функций в алгебраических точках // Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Проблемы аналитической теории чисел и ее применений". Вильнюс: Вильнюсский ун-т, 1974. С. 306-309.
40. О проблемах теории трансцендентных чисел // Дополнение к сборнику переводов "Проблемы теории диофантовых приближений". М.: Мир, 1974. С. 139-160.

1975

41. Всесоюзная конференция "Проблемы аналитической теории чисел и ее применения" // УМН. 1975. Т. 30, N 3. С. 198-200 (Совм. с С.Б. Стечкиным и Р.В. Уждавинюсом).

1977

42. Алгебраическое число // Математическая энциклопедия. 1977. Т. 1. С. 95-98.
43. К проблеме алгебраической независимости значений E-функций в трансцендентных точках // Тезисы докладов и сообщений Всесоюзной школы по теории чисел. Душанбе: Изд-во Таджикск. ун-та, 1977. С. 135-136.
44. Об оценках меры трансцендентности значений E-функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1977. N 6. С. 3-10.
45. The arithmetic properties of values of some classes of analytic functions, Tagungsbericht 10, 1977. Zahlentheorie (Diophantische Approximationen). Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. P. 18.

1979

46. On the estimates of the algebraic independence measures of the values of E functions // J. Austral. Math. Soc. Ser A. 1979. V. 27. P. 385-407.
47. Об арифметических свойствах значений E-функций в алгебраических точках // ДАН СССР. 1979. Т. 248, N 1. С. 50-55.
48. Об арифметических свойствах значений аналитических функций некоторых классов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1979. N 6. С. 24-31.

1980

49. Об арифметических свойствах многочленов от значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями в поле рациональных функций // Acta Arithm. 1980. v. 37. p. 405-426.
50. Об арифметических свойствах значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями в поле рациональных функций // ДАН СССР. 1980. Т. 251. N 4. С. 808-812.
51. Об оценке меры взаимной трансцендентности значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ // УМН. 1980. Т. 35, N 2. С. 227-228.

1981

52. Об оценках многочленов от значений E-функций // Матем. сб. 1981. Т. 115 (157), N 1 (5). С. 3-39.

53. Об оценках многочленов от значений аналитических функций // Тезисы докладов Международной конференции по комплексному анализу и приложениям. Варна: Изд-во Болгарской АН, 1981. С. 78.
- 1982
54. Диофантовы приближения и трансцендентные числа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
- 1983
55. Estimates for the moduli of polynomials with algebraic coefficients of E-functions // Studies in Pure Mathematics. To the Memory of Paul Turan. Academiai Kiado. Budapest. 1983. С. 635-657.
56. Арифметические свойства значений E-функций // Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Теория трансцендентных чисел и ее приложения". М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. С. 160-162.
57. Об основной лемме метода доказательства алгебраической независимости значений E-функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1983. N 6. С. 94-98.
- 1984
58. Введение в теорию чисел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984 (Совм. с А.И. Галочкиным и Ю.В. Нестеренко).
59. Всесоюзная конференция "Теория трансцендентных чисел и ее приложения", УМН. 1984. Т. 39, N 3. С. 251-252 (Совм. с А.И. Галочкиным и Н.И. Фельдманом).
- 1985
60. Об алгебраической независимости значений E-функций, Тезисы докладов Всесоюзной конференции "Теория чисел и ее приложения". Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1985. С. 290-293.
- 1987
61. Об алгебраической независимости значений E-функций в алгебраических точках, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1987. N 1. С. 30-33.
62. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых классов аналитических функций, Труды Математического ин-та АН СССР им. В.А. Стеклова. 1987. Т. 180. С. 232-234.

63. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
64. Памяти Евгения Михайловича Никишина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1987. N 6. С. 88-91. (Совм. с А.Н. Аптекаревым, В.В. Козловым, А.Н. Олевским, М.К. Потаповым, П.Л. Ульяновым).
- 1988
65. On arithmetic properties of the values of E-functions, *New Advances in Transcendence Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. P. 347-351.
- 1989
66. К проблеме алгебраической независимости значений E-функций в алгебраических точках // Матем. заметки. 1989. Т. 45, N 1. С. 115-122.
67. Об одном критерии алгебраической независимости значений E-функций в алгебраических точках // Вестн. Моск ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1989. N 6. С. 17-21.
68. О некоторых задачах об алгебраической независимости значений E-функций // Тезисы докладов Всесоюзной школы "Конструктивные методы и алгоритмы теории чисел". Минск: Изд. Института матем. АН ВССР, 1989. С. 167.
69. Sobre las propiedades aritmeticas de los valores de la E-functions // *Proceedings of the congress on number theory*. Zarautz, 1984. Bilbao: Servicio Editorial Universidad del Pais Vasco, 1989. P. 28-41.
70. Aproximation de los numeros algebraicos mediante numeros racional, *Proceedings of the congress on number theory*. Zarautz, 1984. Bilbao: Servicio Editorial Universidad del Pais Vasco, 1989. P. 138-146.
71. El septimo problema de Hilbert // *Proceedings of the congresso on number theory*. Zarautz, 1984. Bilbao: Servicio Editorial Universidad del Pais Vasco, 1989. P. 176-180.
72. Aproximaciones diofanticas y numeros Transcendentes. Bilbao: Servicio Editorial Universidad del Pais Vasco, 1989. Перевод книги "Диофантовы приближения и трансцендентные числа". М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
73. *Transcendental numbers*. Berlin-New-York: Valter de Greyter, 1989. Перевод книги "Трансцендентные числа". М.: Наука, 1987.
- 1990

74. Аппроксимация Паде и диофантовы приближения // Приложение к книге "Доклады по математике и ее приложениям. Т. 3, Вып. 1. Избранные вопросы математического анализа. Е.М. Никишин". Москва-Тула: Изд. АН СССР и Минвуза РСФСР, 1990. С. 399-411. (Совм. с Ю.В. Нестеренко и В.Н. Сорокиным).
75. On the transcendence and algebraic independence of the values of E-functions at algebraic points // Tagungsbericht 40, 1990. Diophantische Approximationen. Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. P. 16.
76. В.А. Олейников // УМН. 1990. Т. 45, N 1. С. 163-165 (Совм. с В.И. Арнольдом, А.Г. Витушкиным, Е.А. Гориным, В.Я. Лином, Ю.В. Нестеренко, В.М. Тихомировым, П.Л. Ульяновым, М.А. Шубиным).

1991

77. К проблеме алгебраической независимости значений E-функций // Тезисы докладов республиканской научно-теоретической конференции "Теория чисел и ее приложения". Ташкент: Изд. Ташкентского педагогич. ин-та, 1991. С.136.
78. Александр Адольфович Бухштаб (1905-1990) // УМН. 1991. Т. 46, N 1. С. 201-202.
79. Об алгебраической независимости значений E-функций // УМН. 1991. Т. 46, N 4. С. 175-176.

1992

80. On the arithmetic properties of the values of E-function // New Trends in Probab. and Statist. Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory. VSP /TEV, 1992. V. 2. P. 23-29.
81. О трансцендентности значений одного подкласса E-функций // УМН. 1992. Т. 47, N 4. С. 215-216.
82. Кафедра теории чисел // Математика в Московском университете. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. С. 84-111.

1993

83. О трансцендентности значений E-функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб. 1993. Т. 184, N 5. С. 75-84.

84. О линейной независимости значений E-функций в алгебраических точках // Тезисы докладов Международной конференции "Современные проблемы теории чисел". Тула: Изд-во Тульского пед. ин-та. 1993. С. 80.
85. On linear independence of the values of E-functions of algebraic points, Tagungsbericht 43, 1993. Diophantische Approximationen Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. P. 14-15.
- 1994
86. О линейной независимости значений E-функций в алгебраических точках // Матем. заметки. Т. 55, N 2. 1994. С. 174-185.
87. Об алгебраической независимости значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций // Труды МИ РАН им. В.А. Стеклова. 1994. Т. 107. С. 369-376.
- 1995
88. О линейной независимости значений E-функций, связанных одним алгебраическим уравнением над полем рациональных функций // Матем. заметки. 1995. Т. 58, N 5. С. 794-797.
89. Памяти Наума Ильича Фельдмана // Вестн. Моск ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1995, N 6. С. 108-109 (Совм. с Ю.В. Нестеренко).
90. Введение в теорию чисел. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. 2-е дополненное издание) (Совм. с А.И. Галочкиным и Ю.В. Нестеренко).
91. Евгений Михайлович Никишин // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1995, N 6. С. 110-111 (Совм. с А.Н. Аптекаревым, В.А. Колягиным, В.В. Козловым, М.К. Потаповым, В.Н. Сорокиным, П.Л. Ульяновым, А.Т. Фоменко).
92. Наум Ильич Фельдман // УМН. 1995. Т. 50, N 6. С. 157-162 (Совм. с Н.М. Коробовым и Ю.В. Нестеренко).
- 1996
93. О линейной независимости значений E-функций // Матем. сб. 1996. Т. 187, N 8. С. 93-108 (Совм. с Ю.В. Нестеренко).
94. К задаче о линейной независимости значений E-функций // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1996, N 4. С. 53-56.

95. О критериях линейной и алгебраической независимости значений E функций в алгебраических точках // УМН. 1996. Т. 51, N 2. С. 179-180.
96. О критериях линейной и алгебраической независимости значений E -функций в алгебраических точках // Матем. записки. М.: Центр прикл. иссл. при мех-мат фак-те МГУ. 1996. Т. 2. Диофантовы приближения. С. 114-120.
97. О линейной независимости значений E -функций // Тезисы докладов международной конференции "Современные проблемы теории чисел и ее приложения". Тула: Издат. центр Тульского государственного педагогического университета 1996. С. 155.
- 1997
98. Об алгебраической независимости значений E -функций // Труды МИ РАН им. В.А. Стеклова. 1997. Т. 218. С. 439-443.
- 1999
99. Об арифметических свойствах значений E -функций // Матем. заметки. 1999. Т.66, N 3. С. 452-458.
- 2000
100. О свойствах алгебраических уравнений, связывающих множество E -функций над полем рациональных функций // Матем. заметки. 2000. Т. 68, N 5. С. 761-770.
- 2003
101. Кафедра теории чисел, в сб. Математика в Московском Университете, Ред. О.Б. Лупанов и К.А. Рыбников, часть III, Механико-математический факультет МГУ, 2003, стр. 126-139.
- 2007
102. Диофантовы приближения и трансцендентные числа, М., Физматлит, 2007.