

Вопросы к коллоквиуму по теории чисел
1 курс, 2 поток. 2014г., лектор - Н.Г. Мощевитин
(коллоквиум состоится на неделе 01.12.2014 - 06.12.2014)

1. Наименьшее общее кратное. Теорема о том, что всякое общее кратное делится на наименьшее общее кратное.
2. Наибольший общий делитель. Теорема о том, что наибольший общий делитель делится на любой общий делитель.
3. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя.
4. Теорема о представлении наибольшего общего делителя (a, b) в виде $(a, b) = ax + by$: доказательство с помощью алгоритма Евклида.
5. Теорема о представлении наибольшего общего делителя (a, b) в виде $(a, b) = ax + by$: доказательство с помощью минимального положительного элемента множества $\mathcal{M} = \{z = ax + by, x, y \in \mathbb{Z}\}$.
6. Алгоритм решения в целых числах линейного уравнения $ax + by = c$.
7. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Решето Эратосфена. Теорема о существовании и единственности разложения натурального числа на простые множители.
8. Теорема о стремлении к бесконечности суммы $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$.
9. Формула включения-исключения. Применение формулы включения-исключения для вычисления значений функции Эйлера.
10. Функция Эйлера. Формулы $\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ и $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.
11. Функция Мебиуса. Формулы $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$, $\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.
12. Свертка Дирихле и ее свойства. Формула обращения Мебиуса и примеры ее применения.
13. Сравнения и их основные свойства. Классы вычетов. Полная и приведенная системы вычетов.
14. Полная и приведенная системы вычетов. Доказательство мультипликативности функции Эйлера с помощью построения приведенной системы вычетов по модулю mn в виде $mx + ny$; $1 \leq x \leq n, (x, n) = 1$; $1 \leq y \leq m, (y, m) = 1$ (для взаимно простых m и n).
15. Китайская теорема об остатках.
16. Теорема Эйлера, малая теорема Ферма и теорема Вильсона.
17. Полиномиальные сравнения. Теорема о том, что у ненулевого многочлена по простому модулю количество корней не превосходит степени. Лемма Гензеля.

18. Квадратичные вычеты и невычеты. Простейшие свойства. Символ Лежандра. Теорема Эйлера.
19. Лемма Гаусса о символе Лежандра.
20. Квадратичный закон взаимности Гаусса и вычисление символа Лежандра $\left(\frac{2}{p}\right)$.
21. Символ Якоби и его свойства.
22. Показатель элемента по модулю m и его простейшие свойства. Показатель произведения двух элементов с взаимно простыми показателями.
23. Первообразные корни по модулю m . Существование первообразного корня по простому модулю. Критерий первообразного корня.
24. Существование первообразного корня по модулям p^α и $2p^\alpha$.
25. Отсутствие первообразных корней по модулям 2^α , $\alpha \geq 3$, $2^\alpha p^\beta$, $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 1$ и по модулю m , когда у m есть два различных нечетных простых делителя.