## Групповые характеры

Пусть $G$ — конечная абелева группа (операция — умножение).

**Определение.** *Характер* группы $G$ — гомоморфизм $\chi\colon G \to \mathbb{C}^*$.

(Для произвольной группы требуют $|\chi(g)| = 1$, то есть на самом деле $\chi\colon G \to S^1$; для конечной группы это выполнено автоматически, т. к. $g^{|G|} = e \implies \chi(g)^{|G|} = 1$. Если группа топологическая, то ещё нужна непрерывность.)

Из курса алгебры знаем: $G = \langle g_1 \rangle_{n_1} \times \dots \times \langle g_k \rangle_{n_k}$.

Если $g \in G$, то $g = g_1^{\gamma_1} \cdots g_k^{\gamma_k}$, $0 \leqslant \gamma_i < n_i$, откуда

$$\chi(g) = \chi(g_1)^{\gamma_1} \cdots \chi(g_k)^{\gamma_k}.$$

**Мораль.** Характер однозначно задаётся значениями на образующих: $\chi(g_i) = \zeta_i$.

Значения не могут быть произвольными:

$$g_i^{n_i} = e \implies \zeta_i^{n_i} = 1,$$

то есть $\zeta_i$ должно быть корнем из 1 степени $n_i$.

**Факт.** Для любого набора $(\zeta_1, \dots, \zeta_k) \in \mathbb{C}^k$, $\zeta_i^{n_i} = 1$, существует (единственный) характер, удовлетворяющий условиям $\chi(g_i) = \zeta_i$.

**Пример.** Если взять все $\zeta_i = 1$, то получится *главный характер*: $\chi_0(g) = 1$.

**Мораль.** Количество различных характеров группы $G$ равно $n_1 \cdots n_k = |G|$.

**Факт.** Множество всех характеров группы $G$ — группа относительно операции поточечного умножения ($\chi_1\chi_2(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$) с единицей $\chi_0$; более того, эта группа (*двойственная группа* по Понтрягину; $G\hat{\ }$, $\hat{G}$) изоморфна $G$.

## Числовые характеры

Пусть $m \in \mathbb{N}$.

**Определение.** *Характер Дирихле* (или *числовой характер*, или *характер*) по модулю $m$ — функция $\chi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая трём свойствам:

1) $\chi(a + m) = \chi(a)$ (периодичность с периодом $m$);

2) $\chi(a) = 0 \iff (a, m) > 1$;

3) $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ (*для любых* $a, b$, то есть $\chi$ — вполне мультипликативная функция).

**Факт.** Есть естественное соответствие между характерами по модулю $m$ и характерами группы $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$:

$$\chi(a) = \begin{cases} \psi(\overline{a}), & (a, m) = 1, \\ 0, & (a, m) > 1, \end{cases}$$

где $\chi$ — характер Дирихле, $\psi$ — соответствующий характер группы $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

В частности, *главный характер* по модулю $m$:

$$\chi_0(a) = \begin{cases} 1, & (a,m) = 1, \\ 0, & (a,m) > 1. \end{cases}$$

**Контрольный вопрос** (в голову)**.** Сколько всего различных характеров по модулю $m$?

Поскольку мы умеем раскладывать группу $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ в прямое произведение циклических подгрупп, то мы можем явно строить все характеры Дирихле.

**Задачка.** Описать все характеры $\chi$ по модулю $m$, удовлетворяющие данным условиям (найти образующие и описать все возможные наборы значений на образующих):

1) $m = 112$, $\chi(51) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}$;
2) $m = 252$, $\chi(215) = -\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}$ (варианты: $\chi(19) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}$; $\chi(-1) = -1$);
3) $m = 350$, $\chi(183) = -\mathrm{i}$;
4) $m = 490$, $\chi(27) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/7}$ (вариант: $\chi(419) = \mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}/7}$);
5) $m = 980$, $\chi(767) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/7}$ (вариант: $\chi(341) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/7}$);
6) $m = 210$ (или $m = 105$), $\chi(131) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}$;
7) $m = 160$, $\chi(23) = \mathrm{i}$;
8) $m = 144$, $\chi(67) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/3}$;
9) $m = 270$, $\chi(37) = -\mathrm{i}$;
10) $m = 224$, $\chi(11) = \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/6}$;
11) $m = 380$, $\chi(111) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/9}$.

Характер $\chi$ называется вещественным (или действительным), если он принимает только вещественные значения, то есть для всех $a$ выполнено $\chi(a) \in \mathbb{R}$ ($\iff$ $\chi(a) \in \{0, \pm 1\}$).

**Задачка.** Пусть $m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ ($2 < p_1 < \cdots < p_k$ — простые, $\alpha_0 \geqslant 0$, $\alpha_i \geqslant 1$ при $i \geqslant 1$). Найти количество вещественных характеров по модулю $m$.