О показателях иррациональности некоторых чисел

Полянский А.А. (МГУ им.Ломоносова,мех-мат факультет)

Будут рассказаны результаты, улучшающие известные раннее оценки сверху показателей иррациональности и квадратичных показателей иррациональности чисел вида

$$\alpha_k = \sqrt{2k+1}\ln\frac{\sqrt{2k+1}-1}{\sqrt{2k+1}+1},\ k \in \mathbb{N}.$$

Для каждого числа α, не являющегося рациональным числом, можно ввести характеристику, называемую *показателем иррациональности.* Определяется она как точная верхняя грань множества чисел κ таких, что неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < q^{-\kappa}$$

имеет бесконечное количество решений в рациональных $\frac{p}{q}$. Обозначается показатель иррациональности через $\mu(\alpha)$.

Для каждого числа α, не являющегося корнем многочлена второй степени с целыми коэффициентами, можно ввести характеристику, называемую *квадратичным показателем иррациональности.* Определяется она как точная верхняя грань множества чисел κ таких, что неравенство

$$|\alpha - \beta| < H^{-\kappa}(\beta)$$

имеет бесконечное количество решений в квадратичных иррациональностях β. Здесь $H(\beta)$ — наибольший по модулю из целых коэффициентов квадратного трехчлена, корнем которого является β. Обозначается квадратичный показатель иррациональности через $\mu_2(\alpha)$.

Некоторые численные результаты занесены в следующую таблицу:

k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$	k	$\mu(\alpha_k) \leqslant$	$\mu_2(\alpha_k) \leqslant$
3	6.64610...	—	7	5.45248...	—	10	3.45356...	10.0339...
5	5.82337...	—	8	3.47834...	10.9056...	11	5.08120...	—
6	3.51433...	12.4084...	9	5.23162...	—	12	3.43506...	9.46081...