**Программа утверждена на заседании кафедры теории чисел**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Кратные дзета-значения.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация:Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: элементы теории чисел, математический анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные методы дисциплин из пункта 1).

Уметь: решать стандартные задачи тех же дисциплин и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами тех же дисциплин.

8. Формат обучения.

очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы:

1. ApéryR. Irrationalité de ζ (2) et ζ (3). Astérisque, Vol. 61, 1979, 11 – 13.
2. Ball К. М., RivoalT., Irrationalité d’une infinite de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs. Inventiones Mathematicae. Vol. 146, No 1, 2001, 193 – 207.
3. Borwein J. М., Bradley D, М., Broadhurst D, J, Evaluation of k-fold Euler/Zagier sums: A compendium of results for arbitrary k. Journal of combinatorics, Vol. 4, No 2, 31 – 49.
4. Borwein J. М., Bradley D. М., Broadhurst D. J., Lisonek P., Special values of multiple polylogarithms. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 353, No 3, 907 – 941.
5. Euler L., De summis serierum reciprocarum. Commentarii aeademiae seientiarum Petropolitanae 7, 1740, 123 – 134.
6. Euler L., Meditationes circa singulare serierum genus. Novi Commentarii aeademiae seientiarum Petropolitanae 20, 1776, 140 – 186.
7. Эйлер Л., Введение в анализ бесконечно малых. Том I, Издание второе. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1961.
8. Granville A., A decomposition of Riemann’s zeta-function Analytic Number Theory, London Mathematical Society Lecture Note Series 247, Y. Motohashi (ред.), Cambridge University Press, 1997, 95 – 101.
9. Hommfan M. E. Multiple harmonic series. Pacific Journal of Mathematics, 152, No 2, 1992, 275 – 290.
10. Hommfan M. E. The algebra of multiple harmonic series. Journal of Algebra, 194, No 2, 1997, 477 – 495.
11. Kirillov A. N., Dilogarithm Identities. Progress of Theoretical Physics Supplement, 118, 1995, 61 – 142.
12. Kummer E. E., Ueber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationalen Formen ent-stehen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 21, 1840, Issue 21, 74 – 90.
13. Landen J., A New Method of Computing the Sums of Certain Series. Philosophical Transactions of the Koval Society of London, 51, 1759, 553 – 565.
14. Landen J., Mathematical 'memoirs respecting a variety of subjects: with an appendix containing tables of theorems for the calculation of fluent Vol. 1, 1780, London: J.Nourse.
15. von Lindemann F., Uber die Zahl π. Mathematische Annalen 20, 1882, 213 – 225.
16. van Malderen R., Non-recursive expressions for even-index Bernoulli numbers: A remarkable sequence of determinants. arXiv:math/0505437vl, 2008.
17. Markett C., Triple sums and the Riemann zeta function. Journal of Number Theory 48. 1994. 113 - 132.
18. OhnoY., A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values. Journal of Number Theory. 74. No. 1. 1999. 39 - 43.
19. Zagier D., Values of zeta functions and their applications. First European Congress of Mathematics, Birkhauser, Boston, II, 1994, 497 – 512.
20. Zudilin W., Arithmetic of linear forms involving odd zeta values. J. Théorie Nombres Bordeaux, Vol. 16, No. 1, 2004, 251 – 291.
21. Зудилин В. В., Алгебраические соотношения для кратных дзета-значений. Успехи математических наук, 2003, Том 58, январь-февраль. Вып. 1(349), 3 – 32.
22. Зудилин В. В., Одно из чисел, ζ (5), ζ (7), ζ (9), ζ (11) иррационально. Успехи математических наук, 2001, Том 56, Вып. 4, 149 - 150,
23. Уланский Е. А., Тождества для обобщенных полилогарифмов. Математические заметки, 2003, № 4, Том 73, Стр. 613 – 624.
24. Уланский Е. А., Стаффл-соотношения для кратных дзета-значений. Вестник Московского университета. Серия 1, Математика, Механика, 2005, № 2. Стр. 52 - 55.
25. Уланский Е. А., Кратные дзета-значения. Вестник Московского университета. Серия 1, Математика, Механика, 2011, № 3, Стр. 14 - 19.

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Кратные дзета-значения.
2. Преподаватель - доц. Е. А. Уланский.
3. Аннотация курса: спецкурс охватывает результаты со времён Якоба Бернулли и Леонарда Эйлера до наших дней. Вы узнаете о том, как одна из наиболее известных классических задач и её блистательное решение привели к рождению увлекательного направления современной теории чисел, и ознакомитесь не только с доказательствами интересных теорем, но и с открытыми проблемами, как современными, так и трёхсотлетней давности.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Дзета-значения. Базельская задача. |
| Тема 2 | Решение базельской задачи Леонардом Эйлером. |
| Тема 3 | Теорема Роже Апери об иррациональности ζ(3). |
| Тема 4 | Теорема Танги Ривоаля и Кита Болла об иррациональности ζ(2n+1) для бесконечно многих n. |
| Тема 5 | Теорема Вадима Зудилина об иррациональности хотя бы одного из четырёх чисел ζ(5),ζ(7),ζ(9),ζ(11). |
| Тема 6 | Точные формулы для дзета-значений. |
| Тема 7 | Кратные дзета-значения. Формулы Эйлера для кратных дзета-значений, включая ζ(2,1)=ζ(3). |
| Тема 8 | Точные формулы для кратных дзета-значений. |
| Тема 9 | Шаффл-соотношения для кратных дзета-значений. |
| Тема 10 | Стаффл-соотношения для кратных дзета-значений. |
| Тема 11 | Стандартные соотношения для кратных дзета-значений. |
| Тема 12 | Соотношения Майкла Хоффмана. |
| Тема 13 | Связь соотношений Хоффмана и стандартных соотношений. |
| Тема 14 | Соотношения Ясуо Оно. |
| Тема 15 | Теорема о полной сумме. |
| Тема 16 | Теорема о дуальности. |
| Тема 17 | Вывод теорем о полной сумме и дуальности из соотношений Оно. |
| Тема 18 | Линейные пространства, порождённые кратными дзета-значениями фиксированного веса. |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

Вопросы к экзамену:

1. Дзета-значения. Базельская задача.
2. Решение базельской задачи Леонардом Эйлером.
3. Теорема Роже Апери об иррациональности ζ(3).
4. Теорема Танги Ривоаля и Кита Болла об иррациональности ζ(2n+1) для бесконечно многих n.
5. Теорема Вадима Зудилина об иррациональности хотя бы одного из четырёх чисел ζ(5),ζ(7),ζ(9),ζ(11).
6. Точные формулы для дзета-значений.
7. Кратные дзета-значения. Формулы Эйлера для кратных дзета-значений, включая ζ(2,1)=ζ(3).
8. Точные формулы для кратных дзета-значений.
9. Шаффл-соотношения для кратных дзета-значений.
10. Стаффл-соотношения для кратных дзета-значений.
11. Стандартные соотношения для кратных дзета-значений.
12. Соотношения Майкла Хоффмана.
13. Связь соотношений Хоффмана и стандартных соотношений.
14. Соотношения Ясуо Оно.
15. Теорема о полной сумме.
16. Теорема о дуальности.
17. Вывод теорем о полной сумме и дуальности из соотношений Оно.
18. Линейные пространства, порождённые кратными дзета-значениями фиксированного веса.
19. Перечень дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

**Приложение утверждено на заседании кафедры теории чисел**