**Программа утверждена на заседании кафедры теории чисел**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Multiple zeta values and generalized polylogarithms.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация:Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

Объем дисциплины (модуля) составляет 3 зачетных единицы, всего 108 часа, из которых 44 (46\*) часа составляет контактная работа студента с преподавателем (34 (36\*) часа занятия лекционного типа, 12 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), 64 (62\*) часа составляет самостоятельная работа студента.

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

1. освоить следующие дисциплины образовательной программы: элементы теории чисел, математический анализ.
2. обладать следующими компетенциями:

Знать: основные методы дисциплин из пункта 1).

Уметь: решать стандартные задачи тех же дисциплин и применять идеи, использованные в их решениях, для решения аналогичных задач.

Владеть: основными понятиями и теоремами тех же дисциплин.

8. Формат обучения.

очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 2 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 3 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 4 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 5 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 6 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 7 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 8 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Текущий контроль успеваемости | 6 |  |  |  |  | 2 | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 9 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 10 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 11 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 12 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 13 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 14 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 15 | 6 | 2 |  |  |  |  | 2 | 4 |  | 4 |
| Тема 16 | 4 |  |  |  |  |  | 0 | 4 |  | 4 |
| Тема 17\* | 2\* |  |  |  |  |  |  | 2\* |  | 2\* |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 8 (6\*) |  |  |  |  | 2 | 2 | 6(4\*) |  | 6 (4\*) |
| **Итого** | 108 | 30 |  |  |  | 4 | 34 | 74 |  | 74 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «не зачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы:

1. ApéryR. Irrationalité de ζ (2) et ζ (3). Astérisque, Vol. 61, 1979, 11 – 13.
2. Ball К. М., RivoalT., Irrationalité d’une infinite de valeurs de la fonction zeta aux entiers impairs. Inventiones Mathematicae. Vol. 146, No 1, 2001, 193 – 207.
3. Borwein J. М., Bradley D, М., Broadhurst D, J, Evaluation of k-fold Euler/Zagier sums: A compendium of results for arbitrary k. Journal of combinatorics, Vol. 4, No 2, 31 – 49.
4. Borwein J. М., Bradley D. М., Broadhurst D. J., Lisonek P., Special values of multiple polylogarithms. Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 353, No 3, 907 – 941.
5. Euler L., De summis serierum reciprocarum. Commentarii aeademiae seientiarum Petropolitanae 7, 1740, 123 – 134.
6. Euler L., Meditationes circa singulare serierum genus. Novi Commentarii aeademiae seientiarum Petropolitanae 20, 1776, 140 – 186.
7. Granville A., A decomposition of Riemann’s zeta-function Analytic Number Theory, London Mathematical Society Lecture Note Series 247, Y. Motohashi (ред.), Cambridge University Press, 1997, 95 – 101.
8. Hommfan M. E. Multiple harmonic series. Pacific Journal of Mathematics, 152, No 2, 1992, 275 – 290.
9. Hommfan M. E. The algebra of multiple harmonic series. Journal of Algebra, 194, No 2, 1997, 477 – 495.
10. Kirillov A. N., Dilogarithm Identities. Progress of Theoretical Physics Supplement, 118, 1995, 61 – 142.
11. Kummer E. E., Ueber die Transcendenten, welche aus wiederholten Integrationen rationalen Formen ent-stehen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 21, 1840, Issue 21, 74 – 90.
12. Landen J., A New Method of Computing the Sums of Certain Series. Philosophical Transactions of the Koval Society of London, 51, 1759, 553 – 565.
13. Landen J., Mathematical 'memoirs respecting a variety of subjects: with an appendix containing tables of theorems for the calculation of fluent Vol. 1, 1780, London: J.Nourse.
14. von Lindemann F., Uber die Zahl π. Mathematische Annalen 20, 1882, 213 – 225.
15. van Malderen R., Non-recursive expressions for even-index Bernoulli numbers: A remarkable sequence of determinants. arXiv:math/0505437vl, 2008.
16. Markett C., Triple sums and the Riemann zeta function. Journal of Number Theory 48. 1994. 113 - 132.
17. OhnoY., A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values. Journal of Number Theory. 74. No. 1. 1999. 39 - 43.
18. Zagier D., Values of zeta functions and their applications. First European Congress of Mathematics, Birkhauser, Boston, II, 1994, 497 – 512.
19. Zudilin W., Arithmetic of linear forms involving odd zeta values. J. Théorie Nombres Bordeaux, Vol. 16, No. 1, 2004, 251 – 291.
20. Zudilin W., Algebraic relations for multiple zeta values, *Russian Math. Surveys*, **58**:1 (2003), 1–29.
21. Zudilin W., One of the numbers ζ(5), ζ(7), ζ(9), ζ(11) is irrational. *Russian Mathematical Surveys*(2001),56(4):774.
22. E. A. Ulanskii, Identities for Generalized Polylogarithms, [Mathematical Notes](http://link.springer.com/journal/11006), March 2003, Volume 73,[Issue 3,](http://link.springer.com/journal/11006/73/3/page/1) pp 571-581.
23. E. A. Ulanskii, Multiple zeta values, [Moscow University Mathematics Bulletin](http://link.springer.com/journal/11970), June 2011, Volume 66,[Issue 3,](http://link.springer.com/journal/11970/66/3/page/1) pp 105-109.
24. E. A. Ulanskii, A generalization of an identity for integrals of hypergeometric type, [Mathematical Notes](http://link.springer.com/journal/11006), July 2015, Volume 98,[Issue 1,](http://link.springer.com/journal/11006/98/1/page/1) pp 352-354.

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: английский, французский.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Multiple zeta values and generalized polylogarithms.
2. Преподаватель - доц. Е. А. Уланский.
3. Аннотация курса: special course covers results from the times of Jacob Bernoulli and Leonard Euler until nowadays. You will find out how one of the most famous classical problems and its magnificent solution have led to appearance of fascinating branch of modern Number theory. You will get to know the proofs of charming theorems and will hear about open problems as modern as with three hundred year history.
4. Тематическое содержание курса:

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Zeta values. Basel problem and its solution by Leonard Euler. |
| Тема 2 | Roger Apery’s theorem on irrationality of ζ(3). |
| Тема 3 | Tanguy Rivoal and Keith Ball’s theorem on irrationality of  ζ(2n+1) for infinitely many n. |
| Тема 4 | Wadim Zudilin’s theorem on irrationality of at least one of four numbers  ζ(5),ζ(7),ζ(9),ζ(11). |
| Тема 5 | Closed formulae for zeta values. |
| Тема 6 | Multiple zeta values (MZV) and generalized polylogarithms. Weight and length. Classical polylogarithms. Euler formulae for MZV including ζ(2,1)=ζ(3). |
| Тема 7 | Closed formulae for MZV and some values of generalized polylogarithms. |
| Тема 8 | Standard relations for MZV. |
| Тема 9 | Michael Hoffman relations and their connection with standard relations. |
| Тема 10 | Integral representations for MZV and generalized polylogarithms. |
| Тема 11 | Sum relation for MZV. Duality for MZV. |
| Тема 12 | Yasuo Ohno relations for MZV and their connection with sum formula and duality. |
| Тема 13 | Transformations -z/1-z and 1-z for generalized polylogarithms. |
| Тема 14 | Linear independence of generalized polylogarithms. Algebraic independence of classical polylogarithms. |
| Тема 15 | Colored generalized polylogarithms. Connection between different integral representations of generalized polylogarithms. |
| Тема 16 | Identities for integrals of hypergeometric type. Consequences for generalized polylogarithms. |
| Тема 17\* | Linear spaces generated by values of generalized polylogarithms of fixed weight. |

*\* - если специальный курс читается в нечетном семестре (продолжительность нечетного семестра 18 недель, четного семестра 17 недель).*

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

Вопросы к экзамену:

1. Zeta values. Basel problem and its solution by Leonard Euler.
2. Roger Apery’s theorem on irrationality of ζ(3).
3. Tanguy Rivoal and Keith Ball’s theorem on irrationality of ζ(2n+1) for infinitely many n.
4. Wadim Zudilin’s theorem on irrationality of at least one of four numbers ζ(5),ζ(7),ζ(9),ζ(11).
5. Closed formulae for zeta values.
6. Multiple zeta values (MZV) and generalized polylogarithms. Weight and length. Classical polylogarithms. Euler formulae for MZV including ζ(2,1)=ζ(3).
7. Closed formulae for MZV and some values of generalized polylogarithms.
8. Standard relations for MZV.
9. Michael Hoffman relations and their connection with standard relations.
10. Integral representations for MZV and generalized polylogarithms.
11. Sum relation for MZV. Duality for MZV.
12. Yasuo Ohno relations for MZV and their connection with sum formula and duality.
13. Transformations -z/1-z and 1-z for generalized polylogarithms.
14. Linear independence of generalized polylogarithms. Algebraic independence of classical polylogarithms.
15. Colored generalized polylogarithms. Connection between different integral representations of generalized polylogarithms.
16. Identities for integrals of hypergeometric type. Consequences for generalized polylogarithms.
17. Linear spaces generated by values of generalized polylogarithms of fixed weight.
18. Перечень дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Страничка спецкурса на сайте кафедры теории чисел: <http://new.math.msu.su/department/number/dw/doku.php?id=mzveng>

**Приложение утверждено на заседании кафедры теории чисел**