**Программа утверждена на заседании кафедры теории чисел**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

1. Код и наименование дисциплины (модуля): Аналитические функции и трансцендентные числа.

2. Уровень высшего образования – специалитет.

3. Направление подготовки: 01.05.01 Фундаментальные математика и механика. Специализация:Фундаментальная математика.

4. Место дисциплины (модуля) в структуре ООП: вариативная часть ООП. Является специальной дисциплиной (спецкурсом) для студентов 3-6 годов обучения, специализирующихся в данной научной области или смежной научной области, спецкурсом по выбору студента.

Освоение дисциплины необходимо для последующего изучения дисциплин образовательной программы: курсовая работа, научно-исследовательская практика, преддипломная практика, выпускная квалификационная работа.

5. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников)

6. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах с указанием количества академических или астрономических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся:

*Объем дисциплины (модуля) составляет 5зачетных единицы, всего 180 часов, из которых 70 часов составляет контактная работа студента с преподавателем (62 часа занятия лекционного типа, 8 часов мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации),110 часов составляет самостоятельная работа студента.*

7. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия.

Для того чтобы изучение дисциплины было возможно, обучающийся должен

Никаких специальных знаний не требуется.

8. Формат обучения.

Очная форма обучения, лекционные занятия.

9. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам\* (Перечень тем см. Приложения).

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),**  **форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)** | **Всего**  **(часы**) | В том числе | | | | | | | | |
| **Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы**  из них | | | | | | **Самостоятельная работа обучающегося, часы**  из них | | |
| Занятия лекционного типа | Занятия семинарского типа | Групповые консультации | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации | **Всего** | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератовит.п.. | **Всего** |
| Тема 1 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 2 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 3 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 4 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 5 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 6 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 7 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 8 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 9 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 10 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 11 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 12 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 13 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 14 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 15 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 16 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 17 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 18 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 19 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 20 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 21 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 22 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 23 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 24 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Текущий контроль успеваемости | 10 |  |  |  |  | 2 | 2 | 8 |  | 8 |
| Тема 25 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 26 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 27 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 28 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 29 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 30 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 31 | 4 | 2 |  |  |  |  | 2 | 2 |  | 2 |
| Тема 32 | 2 |  |  |  |  |  | 0 | 2 |  | 2 |
| Промежуточная аттестация  *экзамен*  *зачет* | 24 |  |  |  |  | 2 | 2 | 22 |  | 22 |
| **Итого** | 180 | 62 |  |  |  | 8 | 70 | 110 |  | 110 |

10. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы студентов по дисциплине (модулю):

Конспекты лекций, списки задач к лекциям, основная и дополнительная учебная литература.

11. Фонд оценочных средств для промежуточной аттестации по дисциплине (модулю).

* Перечень компетенций:
* Описание шкал оценивания*:*

*экзамен с оценкой по пятибалльной шкале*

*зачет («зачтено» или «незачтено»)*

* Критерии и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю), характеризующих этапы формирования компетенций.
* Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.См. Приложения.

12. Ресурсное обеспечение:

Перечень основной учебной литературы:

[1] Гурвитц А., Курант Р., Теория функций, М., Наука, 1968.

[2] Ленг С., Алгебра, М., Мир, 1968.

[3] Ленг С., Эллиптические функции, М., Наука, 1984.

[4] Ленг С., Введение в теорию модулярных форм, М., Мир, 1979.

[5] Серр Ж.П., Курс арифметики, М., Мир, 1972.

[6] Фельдман Н.И., Седьмая проблема Гильберта, М., Изд-во МГУ, 1982.

[7] Нестеренко Ю.В., Конспект лекций, 2016-2017 учебный год.

Перечень дополнительной учебной литературы: см. Приложения

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»: см. Приложения.

Описание материально-технической базы: аудитории для проведения лекционных занятий.

13. Язык преподавания: русский (при необходимости – английский).

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Аналитические функции и трансцендентные числа.
2. Преподаватели - проф. А. И. Галочкин, проф. Ю. В. Нестеренко.
3. Аннотация курса: излагаются основные методы теории  диофантовых приближений и трансцендентных чисел: метод Эрмита-Линдемана, метод Зигеля-Шидловского, метод Гельфонда-Шнейдера, метод Малера. Доказывается ряд теорем о трансцендентности и алгебраической независимости значений аналитических функций.
4. Тематическое содержание курса

|  |  |
| --- | --- |
| Тема 1 | Эллиптические функции. Основной параллелограмм решјтки периодов. Общие теоремы об эллиптических функциях (Существование полюсов в параллелограмме периодов, сумма вычетов в параллелограмме периодов, суммы порядков полюсов и нулей в параллелограмме периодов, сумма полюсов и нулей в параллелограмме периодов с учјтом кратностей.). Порядок эллиптической функции. [3], гл.1, џ1, [1], гл. 1, џ3-5. |
| Тема 2 | Функции Вейерштрасса P(z). Теорема сложения для функции P(z) и еј производной. Удвоение точек. [3], гл.1, џ2, 3, [1], гл. 1, џ8. |
| Тема 3 | Выражение произвольных эллиптических функций через P(z) и еј производную. [3], гл.1, џ2, теорема 4, [1], гл. 1, џ9. |
| Тема 4 | Дифференциальное уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса. Инварианты P(z), их выражение через периоды. [3], гл.1, џ2, теорема 5, [1], гл. 1, џ7. |
| Тема 5 | Условия алгебраической зависимости эллиптических функций Вейерштрасса P(z). [6], Дополнение А, џ13. |
| Тема 6 | Функция (z). Производная функции (z). Теорема сложения для (z). Квазипериоды и соотошение Лежандра. [1], гл. 1, џ11, 12. |
| Тема 7 | Функция (z). Выражение эллиптических функций через (z). [1], гл. 1, џ13, 14. |
| Тема 8 | Порядок роста целых и мероморфных во всей плоскости функций. Порядок роста функций (z); (z); P(z), [6], [7]. |
| Тема 9 | Теорема Шнейдера-Ленга (без доказательства), еј следствие для функций az + b(z);P();P0(). Линейная независимость над полем алгебраических чисел периода, соответствующего квазипериода и 1 эллиптической функции Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами. Трансцендентность в тех же условиях периодов и квазипериодов функции Вейерштрасса, еј значений в алгебраических точках и т.п.). гл. 6, џ1.6, 3.6, [7] |
| Тема 10 | Теорема Шнейдера-Ленга (без доказательства), вывод из неј теоремы Шнейдера |
| Тема 11 | о трансценденности значений модулярной функции j( ) в алгебраических точках 2C; = > 0, степени большей 2. [7] |
| Тема 12 | Модулярная группа. Модулярные функции и формы. [5] |
| Тема 13 | Лемма о сходимости ряда по точкам двумерной решјтки. Ряды Эйзенштейна и их свойства. [5] |
| Тема 14 | Разложение в ряд Фурье рядов Эйзенштейна E2k( ); k 2. [5] |
| Тема 15 | Нули и полюсы модулярной функции веса 2k. Функции дискриминант ( ) и модулярный инвариант j( ). [5] |
| Тема 16 | Целость коэффициентов рядов Фурье дискриминанта и модулярного инварианта. [3], гл.4, џ1. |
| Тема 17 | Нули и полюсы модулярных функций. Базис в пространстве модулярных форм заданного веса. Размерность этого пространства. [5] |
| Тема 18 | Необращение в нуль дискриминанта и разрешимость уравнения j( ) = c при любом комплексном c. [3], гл.3, теорема 4, следствия 1 и 2. |
| Тема 19 | Параметризация любой эллиптической кривой y2 = 4x3 􀀀 g2x 􀀀 g3 эллиптическими функциями P();P0(). [1], часть II, гл. 4, 3,4. |
| Тема 20 | Выражение любой модулярной функции веса 0 через j( ). [5], гл. 7, предложение 6, [3], гл.5, теорема 2. |
| Тема 21 | Система дифференциальных уравнений для рядов Эйзенштейна. [4], гл. 10, теорема 5.3. |
| Тема 22 | Разложение дискриминанта в бесконечное произведение. Неотрицательность коэффициентов ряда Фурье для дискриминанта. [7]. |
| Тема 23 | Действие модулярной группы на множестве матриц с целыми, взаимно простыми в совокупности элементами и с фиксированным определителем N > 0. Представители смежных классов. [3], гл.5, 1. |
| Тема 24 | Количество смежных классов при действии модулярной группы из вопроса 22. [3], гл.5, 1. |
| Тема 25 | Модулярное уравнение для j( ). [3], гл.5, 2. |
| Тема 26 | Неприводимость и симметричность модулярного многочлена. [3], гл.5, 2, теорема 3. |
| Тема 27 | Алгебраичность значений модулярного инварианта в мнимых квадратичных точках. [3], гл.5, 2, теорема 4. |
| Тема 28 | Леммы об оценке сверху абсолютной величины модулярного инварианта и оценке снизу абсолютной величины дискриминанта. [7]. |
| Тема 29 | Лемма об оценке степени, знаменателя и максимума модулей сопряженных алгебраического числа j(S) при любом натуральном S и таком комплексном ; = > 0; что j() есть алгебраическое число. [7]. |
| Тема 30 | Гипотеза Малера об алгебраичности при любом ; = > 0; по крайней мере одного из двух комплексных чисел e2I, j(). Конструкция вспомогательной функции. [7] |
| Тема 31 | Оценка сверху модуля вспомогательной функции в окрестности точки z = 0 и оценка кратности нуля этой функции в точке e2I. [7]. |
| Тема 32 | Построение многочлена B(x; z)Z[x; z] с отличным от нуля значением в точке j(); e2I, оценка сверху абсолютной величины этого значения. |

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов обучения, характеризующих этапы формирования компетенций.

Вопросы к экзамену:

1. Эллиптические функции. Основной параллелограмм решјтки периодов. Общие теоремы об эллиптических функциях (Существование полюсов в параллелограмме периодов, сумма вычетов в параллелограмме периодов, суммы порядков полюсов и нулей в параллелограмме периодов, сумма полюсов и нулей в параллелограмме периодов с учјтом кратностей.). Порядок эллиптической функции. [3], гл.1, џ1, [1], гл. 1, џ3-5.
2. Функции Вейерштрасса P(z). Теорема сложения для функции P(z) и еј производной. Удвоение точек. [3], гл.1, џ2, 3, [1], гл. 1, џ8.
3. Выражение произвольных эллиптических функций через P(z) и еј производную. [3], гл.1, џ2, теорема 4, [1], гл. 1, џ9.
4. Дифференциальное уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса. Инварианты P(z), их выражение через периоды. [3], гл.1, џ2, теорема 5, [1], гл. 1, џ7.
5. Условия алгебраической зависимости эллиптических функций Вейерштрасса P(z). [6], Дополнение А, џ13.
6. Функция (z). Производная функции (z). Теорема сложения для (z). Квазипериоды и соотошение Лежандра. [1], гл. 1, џ11, 12.
7. Функция (z). Выражение эллиптических функций через (z). [1], гл. 1, џ13, 14.
8. Порядок роста целых и мероморфных во всей плоскости функций. Порядок роста функций (z); (z); P(z), [6], [7].
9. Теорема Шнейдера-Ленга (без доказательства), еј следствие для функций az + b(z);P();P0(). Линейная независимость над полем алгебраических чисел периода, соответствующего квазипериода и 1 эллиптической функции Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами. Трансцендентность в тех же условиях периодов и квазипериодов функции Вейерштрасса, еј значений в алгебраических точках и т.п.). гл. 6, џ1.6, 3.6, [7]
10. Теорема Шнейдера-Ленга (без доказательства), вывод из неј теоремы Шнейдера
11. о трансценденности значений модулярной функции j( ) в алгебраических точках 2C; = > 0, степени большей 2. [7]
12. Модулярная группа. Модулярные функции и формы. [5]
13. Лемма о сходимости ряда по точкам двумерной решјтки. Ряды Эйзенштейна и их свойства. [5]
14. Разложение в ряд Фурье рядов Эйзенштейна E2k( ); k 2. [5]
15. Нули и полюсы модулярной функции веса 2k. Функции дискриминант ( ) и модулярный инвариант j( ). [5]
16. Целость коэффициентов рядов Фурье дискриминанта и модулярного инварианта. [3], гл.4, џ1.
17. Нули и полюсы модулярных функций. Базис в пространстве модулярных форм заданного веса. Размерность этого пространства. [5]
18. Необращение в нуль дискриминанта и разрешимость уравнения j( ) = c при любом комплексном c. [3], гл.3, теорема 4, следствия 1 и 2.
19. Параметризация любой эллиптической кривой y2 = 4x3 􀀀 g2x 􀀀 g3 эллиптическими функциями P();P0(). [1], часть II, гл. 4, 3,4.
20. Выражение любой модулярной функции веса 0 через j( ). [5], гл. 7, предложение 6, [3], гл.5, теорема 2.
21. Система дифференциальных уравнений для рядов Эйзенштейна. [4], гл. 10, теорема 5.3.
22. Разложение дискриминанта в бесконечное произведение. Неотрицательность коэффициентов ряда Фурье для дискриминанта. [7].
23. Действие модулярной группы на множестве матриц с целыми, взаимно простыми в совокупности элементами и с фиксированным определителем N > 0. Представители смежных классов. [3], гл.5, 1.
24. Количество смежных классов при действии модулярной группы из вопроса 22. [3], гл.5, 1.
25. Модулярное уравнение для j( ). [3], гл.5, 2.
26. Неприводимость и симметричность модулярного многочлена. [3], гл.5, 2, теорема 3.
27. Алгебраичность значений модулярного инварианта в мнимых квадратичных точках. [3], гл.5, 2, теорема 4.
28. Леммы об оценке сверху абсолютной величины модулярного инварианта и оценке снизу абсолютной величины дискриминанта. [7].
29. Лемма об оценке степени, знаменателя и максимума модулей сопряженных алгебраического числа j(S) при любом натуральном S и таком комплексном ; = > 0; что j() есть алгебраическое число. [7].
30. Гипотеза Малера об алгебраичности при любом ; = > 0; по крайней мере одного из двух комплексных чисел e2I, j(). Конструкция вспомогательной функции. [7]
31. Оценка сверху модуля вспомогательной функции в окрестности точки z = 0 и оценка кратности нуля этой функции в точке e2I. [7].
32. Построение многочлена B(x; z)Z[x; z] с отличным от нуля значением в точке j(); e2I, оценка сверху абсолютной величины этого значения.
33. Завершение доказательства гипотезы Малера. [7].
34. Перечень дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

**Приложение утверждено на заседании кафедры теории чисел**