Семинар 4 — Системы линейных диофантовых уравнений

4.1. Обоснуйте следующий алгоритм нахождения всех целочисленных решений уравнения

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b,$$

где $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$.

1) Составить матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2) К любому столбцу матрицы A разрешается прибавлять любой другой, умноженный на целое число. Такими преобразованиями столбцов привести матрицу A к виду

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & d & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k-1} & c_{1k} & c_{1k+1} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk-1} & c_{nk} & c_{nk+1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, \qquad d \in \mathbb{Z},\ d \neq 0.$$

Если $d \nmid b$, то исходное уравнение не имеет решений в $\mathbb{Z}$. Если же $d \mid b$, то общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + t_{k-1} \begin{pmatrix} c_{1k-1} \\ \vdots \\ c_{nk-1} \end{pmatrix} + \frac{b}{d} \begin{pmatrix} c_{1k} \\ \vdots \\ c_{nk} \end{pmatrix} + t_{k+1} \begin{pmatrix} c_{1k+1} \\ \vdots \\ c_{nk+1} \end{pmatrix} + \ldots + t_n \begin{pmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix},$$

где $t_1, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1}, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$.

4.2. Решите в целых числах уравнения:

а) $3x + 5y + 7z = 1$;

б) $8x + 15y + 29z = 1$;

в) $179x + 65y - 8z = 7$;

г) $9x + 33y - 21z - 12w = 3$.

4.3. Обобщите алгоритм из задачи 4.1 на случай системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

с целыми a_{ij}, b_i.

4.4. Решите в целых числах системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 17x_1 + x_2 - 7x_3 = 1 \\ 12x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

г) $\begin{cases} 8x_1 + 27x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

4.5.* Докажите, что система (1) имеет целочисленное решение тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель миноров второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

равен наибольшему общему делителю миноров второго порядка расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{pmatrix}.$$