Семинар предпоследний Цепные дроби

Конечные цепные дроби

Пусть a_0 — целое, $a_1, \dots, a_n$ — натуральные числа. Определим две последовательности

$$\begin{aligned} &p_{-2} = 0, \quad && p_{-1} = 1, \quad && p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad && k = 0, \dots, n, \\ &q_{-2} = 1, && q_{-1} = 0, && q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, && k = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Напоминание: для любого $k = 0, \dots, n$ справедливы соотношения

а) $p_k/q_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$;
б) $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}$;
в) $p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k = (-1)^k a_k$;
г) $(p_k, q_k) = 1$.
д) $\dfrac{p_k}{q_k} - \dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \dfrac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}}$; ж) $\dfrac{p_0}{q_0} < \dfrac{p_2}{q_2} < \dfrac{p_4}{q_4} < \ldots \leqslant \dfrac{p_n}{q_n} \leqslant \ldots < \dfrac{p_5}{q_5} < \dfrac{p_3}{q_3} < \dfrac{p_1}{q_1}$;
е) $\dfrac{p_k}{q_k} - \dfrac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \dfrac{(-1)^k a_k}{q_k q_{k-2}}$; з) $q_k > q_{k-1}, \quad q_k > 2q_{k-2}$.

Числа p_k/q_k называются *подходящими дробями* цепной дроби $[a_0; a_1, \dots, a_n]$.

1.1. Представьте в виде цепных дробей числа а) $\dfrac{179}{17}$; б) $-\dfrac{77}{92}$; в) $\dfrac{297}{210}$.

1.2. Чему равны взаимно простые натуральные числа P_n, Q_n, такие что $\dfrac{P_n}{Q_n} = [\underbrace{1; 1, \dots, 1}_{n}]$?

1.3. Докажите, что

$$\begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{pmatrix}.$$

1.4. Пусть взаимно простые числа a и b удовлетворяют равенству $a/b = [a_0; a_1, \dots, a_n]$. Докажите, что уравнение $ax - by = 1$ с неизвестными x и y имеет решением одну из пар (q_{n-1}, p_{n-1}) или $(-q_{n-1}, -p_{n-1})$. От чего зависит, какая именно пара является решением?

1.5. Разлагая число a/b в цепную дробь, решите в целых числах уравнение $ax - by = 1$, если
а) $a = 30,\ b = 17$;
б) $a = -18,\ b = 79$;
в) $a = 144,\ b = 89$.

1.6*. Пусть $a_0 \geqslant 1$. Докажите, что для числителей p_{n-1}, p_n двух последних подходящих дробей цепной дроби $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ справедливо равенство $p_n/p_{n-1} = [a_n; a_{n-1}, \dots, a_0]$.

Бесконечные цепные дроби

1.7. Определим последовательности $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$\alpha_0 = \alpha, \quad \alpha_{k+1} = (\alpha_k - [\alpha_k])^{-1}, \quad a_k = [\alpha_k], \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Докажите, что для любого k справедливы равенства

$$\alpha = [a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, \alpha_k] = \frac{\alpha_k p_{k-1} + p_{k-2}}{\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2}}.$$

1.8. Докажите, что для подходящих дробей любого вещественного числа α справедливы неравенства

$$\frac{a_{k+2}}{q_k q_{k+2}} \leqslant \left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

1.9. Разложите в цепные дроби числа
а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $(1+\sqrt{5})/2$; г) $1/2+\sqrt{7}$.

1.10. Вычислите следующие цепные дроби:
а) $[2;\overline{2}]$; б) $[2;\overline{1,1,3}]$; в) $[5;\overline{1,2,1,10}]$; г) $[5;\overline{1,4,1,10}]$.
Здесь черта означает период.

1.11. Найдите рациональное число, которое отличается от α не более, чем на 10^{-4}, если
а) $\alpha=\sqrt{2}$; б) $\alpha=2+\sqrt{5}$; в) $\alpha=3+\sqrt{7}$; г) $\alpha=\sqrt{23}$.

1.12. Докажите, что а) $\sqrt{d^2+1}=[d;\overline{2d}]$; б) $\sqrt{d^2+2}=[d;\overline{d,2d}]$.

1.13. Докажите, что $[\underbrace{2;2,\ldots,2}_{n}]=\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}-(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1+\sqrt{2})^{n}-(1-\sqrt{2})^{n}}$.

1.14. Будем называть вещественные числа α, β *эквивалентными* и писать $\alpha\sim\beta$, если найдутся целые a, b, c, d, удовлетворяющие равенствам

$$\alpha=\frac{a\beta+b}{c\beta+d}, \qquad |ad-bc|=1.$$

Будем также при помощи записи $\alpha\asymp\beta$ обозначать, что разложения α и β в цепные дроби совпадают, начиная с какого-то момента. Докажите следующие утверждения.
а) Если $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$, то $\alpha\sim\beta$.
б) Если $\alpha\asymp\beta$, то $\alpha\sim\beta$.
в) Если $\alpha=\beta+n$, $n\in\mathbb{Z}$, то $\alpha\asymp\beta$.
г) Если $\alpha=\beta^{-1}$, то $\alpha\asymp\beta$.
д)* Если $\alpha=-\beta$, то $\alpha\asymp\beta$.
е)* Если $\alpha\sim\beta$, то $\alpha\asymp\beta$.

1.15.* Пусть α, β — иррациональные корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами (в частности, $\alpha\neq\beta$). Докажите, что записанный задом наперёд период цепной дроби числа α является периодом цепной дроби числа β.

1.16.* Пусть $\alpha\in\mathbb{Q}$, $\alpha>1$, $\sqrt{\alpha}\notin\mathbb{Q}$. Докажите, что $\sqrt{\alpha}=[a_0;\overline{\underbrace{a_1,a_2,\ldots,a_2,a_1}_{\text{симметричная часть}},2a_0}]$.

1.17.* Найдите наименьшее натуральное n, для которого существует такое натуральное m, что

$$\sqrt{2}<\frac{m}{n}<\frac{297}{210}.$$

1.18.* Пусть α — иррациональное число и пусть p_k/q_k и p_{k+1}/q_{k+1} — его k-ая и $(k+1)$-ая подходящие дроби. Докажите, что для любого рационального числа p/q, такого что $0<q<q_{k+1}$, справедливо неравенство

$$|q\alpha-p|>|q_k\alpha-p_k|.$$

1.19.* Пусть α — иррациональное число и p/q — рациональное число в несократимой записи, такое что

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{2q^2}.$$

Докажите, что p/q — некоторая подходящая дробь числа α.

1.20. Пользуясь задачей 1.19, докажите, что если натуральные числа x, y удовлетворяют неравенству $|x^2-dy^2|<\sqrt{d}$, то x/y — некоторая подходящая дробь числа $\sqrt{d}$.

1.21. Пусть a,b — натуральные числа, такие что (a,b) — решение *уравнения Пелля* $x^2-dy^2=1$ с наименьшим возможным b. Докажите, что
а) a/b — некоторая подходящая дробь числа $\sqrt{d}$;
б) все решения уравнения $x^2-dy^2=1$ в целых числах имеют вид $(\pm a_m,\pm b_m)$, $m\in\mathbb{Z}$, где a_m,b_m определяются из соотношения $a_m+b_m\sqrt{d}=(a+b\sqrt{d})^m$;
в)* если n — наименьший период цепной дроби числа $\sqrt{d}$, то $a/b=p_{n-1}/q_{n-1}$ при чётном n и $a/b=p_{2n-1}/q_{2n-1}$ при нечётном n.