

# **СБОРНИК ЗАДАЧ**

по теории чисел

предназначено для семинаров  
по курсу «Теория чисел»

кафедра теории чисел  
механико-математического факультета  
МГУ имени М. В. Ломоносова

28 августа 2018 г.

# Оглавление

<b>Оглавление</b>	<b>i</b>
<b>Некоторые обозначения</b>	<b>iii</b>
<b>1 Аналитическая теория чисел: Элементарные методы</b>	<b>1</b>
1.1 Вокруг оценок Чебышёва . . . . .	1
1.2 Это было давно и неправда . . . . .	3
1.3 Оценки для арифметических функций . . . . .	5
1.4 Суммы с арифметическими функциями: Начало . . . . .	6
1.5 Разное . . . . .	8
<b>2 Вокруг дзета-функции Римана и асимптотического закона</b>	<b>9</b>
2.1 Ряды Дирихле . . . . .	9
2.2 Различные асимптотики . . . . .	12
2.3 Числа Бернулли и формула Эйлера–Маклорена . . . . .	15
<b>3 Дополнительные вопросы аналитической теории чисел</b>	<b>18</b>
3.1 Суммы с функцией Мёбиуса . . . . .	18
3.2 Тауберовы теоремы . . . . .	20
<b>4 Характеры</b>	<b>21</b>
4.1 Дела давно минувших дней... . . . .	21
4.2 Строение группы $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ . . . . .	22
4.3 Характеры . . . . .	24
4.4 L-функции и теорема Дирихле о простых числах . . . . .	25
4.5 Суммы с характерами . . . . .	27
<b>5 Диофантовы приближения и геометрия чисел</b>	<b>35</b>
5.1 Диофантовы приближения . . . . .	35
5.2 Решётки . . . . .	38
5.3 Ряды Фарея . . . . .	40
<b>6 Цепные дроби (TODO)</b>	<b>43</b>
<b>7 Алгебраические числа</b>	<b>44</b>
7.1 Неприводимые многочлены . . . . .	44
7.2 Конечные расширения . . . . .	45

---

7.3	Целые алгебраические числа . . . . .	47
7.4	Вокруг основной теоремы арифметики . . . . .	48
7.5	Круговые многочлены и поля . . . . .	52
7.6	Построения с помощью циркуля и линейки . . . . .	55
<b>8</b>	<b>Иррациональные и трансцендентные числа</b>	<b>56</b>

# Некоторые обозначения

$[x]$  — целая часть числа  $x$ ,  $\{x\} = x - [x]$  — дробная часть числа  $x$ .

$\nu_p(n)$  — кратность вхождения простого числа  $p$  в каноническое разложение на простые сомножители числа  $n$ .

$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$  — количество простых чисел, не превосходящих  $x$ .

$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$ .

$\Lambda(n)$  — функция Мангольда:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & n = p^\alpha, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ .

$\mu(n)$  — функция Мёбиуса:

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & p^2 \mid n, \\ (-1)^s, & n = p_1 \cdots p_s, \quad p_1 < \cdots < p_s; \end{cases}$$

$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ .

$\varphi(n)$  — функция Эйлера.

$\tau(n) = \sum_{d \mid n} 1$  — количество (натуральных) делителей числа  $n$ .

$\sigma(n) = \sum_{d \mid n} d$  — сумма делителей числа  $n$ .

$\omega(n) = \sum_{p \mid n} 1$  — количество различных простых делителей числа  $n$ .

$\Omega(n) = \sum_{p \mid n} \nu_p(n)$  — количество простых делителей числа  $n$  с учётом кратностей.

$\zeta(s)$  — дзета-функция Римана:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  ( $\Re s > 1$ ).

$L(s, \chi)$  — L-функция Дирихле:  $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$  ( $\Re s > 1$ ).

$\mathbb{A}$  — поле всех алгебраических чисел,  $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$  — кольцо всех целых алгебраических чисел. Если  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}$ , то  $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}_{\mathbb{A}} \cap K$  — кольцо целых чисел поля  $K$ .

# Глава 1

## Аналитическая теория чисел: Элементарные методы

### 1.1 Вокруг оценок Чебышёва

Рассмотрим функции  $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ ,  $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$ ,  $\psi(x) = \sum_{p^\alpha \leq x} \ln p$ . (Если не сказано противное, то  $x \in [1, +\infty)$ ,  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ,  $p$  — простое число; в формуле  $p^\alpha$  подразумевается  $\alpha \in \mathbb{N}$ .)

**Задача 1.1.** Доказать, что для функции  $\psi(x)$  справедливы представления

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p = \ln[1, 2, \dots, [x]] = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

где  $[a_1, \dots, a_n]$  — наименьшее общее кратное чисел  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ ,  $\Lambda(n)$  — функция Мангольда, т. е.

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p, & n = p^\alpha, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Задача 1.2.** Доказать равенство  $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n$ .

**Задача 1.3.** Доказать равенства:

- 1)  $\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}) + \dots$ , причём количество ненулевых слагаемых в сумме справа равно  $[\ln x / \ln 2]$ ;
- 2)  $\ln([x]!) = \psi(x) + \psi(x/2) + \psi(x/3) + \dots$ . (Указание. Использовать задачу 1.2.)

**Задача 1.4.** Используя каноническое разложение на простые множители числа  $n!$  и формулу Стирлинга, доказать равенства:

- 1)  $\sum_{p \leq n} \left( \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots \right) \ln p = n \ln n + O(n)$ ;
- 2)  $\sum_{p \leq n} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \ln p = n \ln n + O(n)$ .

**Задача 1.5.** Доказать оценки:

- 1)  $\sum_{p \leq 2n} \left( \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \right) \ln p = O(n)$ ;

- 2)  $\sum_{n < p \leq 2n} \ln p = O(n)$ ;  
 3)  $\theta(x) = O(x)$ .

**Задача 1.6.** Используя задачи 1.4 и 1.5, доказать равенство

$$\sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} = \ln x + O(1).$$

(Уточнение см. в задаче 2.15.)

**Задача 1.7.** Доказать, что существуют положительные постоянные  $C_i$ , такие что справедливы утверждения:

- 1) Для любых  $x \geq 1$ ,  $a \geq 1$  выполнено неравенство

$$\left| \sum_{x < p \leq ax} \frac{\ln p}{p} - \ln a \right| \leq C_1.$$

- 2)  $\theta(x) \geq C_2 x$ ,  $x \geq 2$ .  
 3) Для любого  $x \geq 1$  интервал  $(x, C_3 x)$  содержит простое число.

**Задача 1.8** (оценки Чебышёва). Доказать, что существуют положительные постоянные  $A_i, B_i$ , такие что справедливы неравенства:

- 1)  $A_1 x \leq \theta(x) \leq B_1 x$ ,  $x \geq 2$ ;  
 2)  $A_2 x \leq \psi(x) \leq B_2 x$ ,  $x \geq 2$ ;  
 3)  $A_3 \frac{x}{\ln x} \leq \pi(x) \leq B_3 \frac{x}{\ln x}$ ,  $x \geq 2$ ;  
 4)  $A_4 n \ln n \leq p_n \leq B_4 n \ln n$ ,  $n \geq 2$ , где  $p_n$  —  $n$ -е простое число (т. е.  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3, \dots$ ).

**Задача 1.9.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{p \geq 3} \frac{1}{p^a (\ln p)^b (\ln \ln p)^c}$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

**Задача 1.10** (преобразование Абеля в интегральной форме).

- 1) Пусть  $a_n$  — комплексные числа,  $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывно дифференцируемая функция,  $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ . Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} a_n g(n) = A(x)g(x) - \int_1^x A(u)g'(u) du.$$

- 2) Более общо, пусть  $a < b$  — вещественные числа,  $a_n$  — комплексные числа при (целых)  $n \in (a, b]$ ,  $g: (a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывно дифференцируемая функция,  $A(x) = \sum_{a < n \leq x} a_n$ . Доказать, что

$$\sum_{a < n \leq b} a_n g(n) = A(b)g(b) - \int_a^b A(x)g'(x) dx.$$

**Задача 1.11.** Используя преобразование Абеля, доказать равенства ( $\gamma, c_1, c_2$  — некоторые постоянные):

- 1)  $\sum_{n \leq x} \ln n = x \ln x - x + O(\ln x)$ ,  $x \geq 2$ ;

$$2) \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$3) \sum_{n \leq x} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{x} + c_1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right);$$

$$4) \text{ если } a \in (0, 1), \text{ то } \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^a} = \frac{x^{1-a}}{1-a} - a \int_0^{+\infty} \frac{\{u\} du}{u^{a+1}} + O(x^{-a}), \text{ причём постоянная в символе Ландау } O(\cdot) \text{ не зависит от } a;$$

$$5) \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{n \ln n} = \ln \ln x + c_2 + O\left(\frac{1}{x \ln x}\right), \quad x \geq 2.$$

**Задача 1.12.** Используя задачу 1.6 и преобразование Абеля, доказать, что для некоторой постоянной  $c_0$  справедливо равенство

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + c_0 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right), \quad x \geq 2.$$

**Задача 1.13.** Доказать, что для некоторой постоянной  $A > 0$  (вычисление этой постоянной см. в задаче 2.17) выполнено

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = A \ln x + O(1).$$

(Указание.  $-\ln(1-z) = z + O(z^2)$  при  $|z| \leq 1/2$ .)

**Задача 1.14.** Пусть вещественнозначные функции  $f(x), g(x)$  интегрируемы на всяком отрезке  $[a, b] \subseteq [x_0, +\infty)$ , причём  $g(x) > 0$  при  $x \geq x_0$ , а несобственный интеграл  $\int_{x_0}^{+\infty} g(x) dx$  расходится. Допустим также, что существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ . Доказать, что предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{x_0}^x f(u) du}{\int_{x_0}^x g(u) du}$$

также существует и равен  $c$ .

**Задача 1.15.** Доказать, что если предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\ln x}$  существует, то он равен 1. (Указание. Использовать задачу 1.6 или 1.12, преобразование Абеля и задачу 1.14.)

## 1.2 Это было давно и неправда

Вспомним некоторые основные факты с первого курса про арифметические функции.

Арифметической функцией называется произвольная функция  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ . Арифметическая функция  $f$  называется мультипликативной, если, во-первых, она не является тождественно нулевой и, во-вторых, для любых взаимно простых  $a, b \in \mathbb{N}$  выполнено  $f(ab) = f(a)f(b)$ . Если же равенство  $f(ab) = f(a)f(b)$  справедливо для всех  $a, b \in \mathbb{N}$ , то функция  $f$  называется вполне мультипликативной.

Парочка простейших свойств мультипликативных функций:

- Для любой мультипликативной функции  $f$  выполнено  $f(1) = 1$ .

- Если  $f$  — мультипликативная функция, то

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{p|n} (1 + f(p) + f(p^2) + \dots + f(p^{v_p(n)})).$$

Другими словами, функция  $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$  тоже является мультипликативной. (Обратное также верно.)

Одной из важнейших мультипликативных функций является *функция Мёбиуса*

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & p^2 | n, \\ (-1)^s, & n = p_1 \cdots p_s, p_1 < \dots < p_s. \end{cases}$$

Её главная прелесть заключается в формуле

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1, \end{cases} \quad (1.1)$$

следствием которой является *формула обращения Мёбиуса*: арифметические функции  $f, F$  связаны соотношением  $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$  тогда и только тогда, когда для них же выполнено  $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(n/d)$ .

Другой известный вариант формулы обращения Мёбиуса — обобщение предыдущего утверждения на функции  $f, F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(x/n) \iff f(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)F(x/n).$$

Ещё один важный пример мультипликативной функции даёт *функция Эйлера*  $\varphi$ , где  $\varphi(n)$  — количество натуральных чисел, не превосходящих  $n$  и взаимно простых с  $n$ . Полезные формулы:

$$\varphi(n) = \prod_{p|n} (p^{v_p(n)} - p^{v_p(n)-1}) = \prod_{p|n} p^{v_p(n)-1} (p-1) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

Последнее представление является просто формулой включений-исключений, если считать  $\varphi(n)$  по определению. Согласно формуле обращения Мёбиуса, оно равносильно равенству  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$  (которое несложно доказать и непосредственно).

*Свёрткой Дирихле*  $f \star g$  двух арифметических функций  $f, g$  называется арифметическая функция, задающаяся формулой

$$(f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2).$$

Некоторые простейшие свойства свёртки Дирихле:

- коммутативность:  $f \star g = g \star f$ ;
- ассоциативность:  $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$ ;
- билинейность (над  $\mathbb{C}$ ):  $(c_1 f_1 + c_2 f_2) \star g = c_1 (f_1 \star g) + c_2 (f_2 \star g)$  (линейность по второму аргументу получается по коммутативности);

- свёртка Дирихле мультипликативных функций является мультипликативной функцией. (Более того, мультипликативные функции образуют абелеву группу относительно свёртки Дирихле с нейтральным элементом  $\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n > 1. \end{cases}$ )

Используя свёртку Дирихле, можно, например, переписать основное свойство функции Мёбиуса в виде  $\mu \star \mathbf{1} = \varepsilon$ , где  $\mathbf{1}(n) = 1$  (тождественная единица), а формула обращения принимает вид  $F = f \star \mathbf{1} \iff f = \mu \star F$  и становится очевидной.

### 1.3 Оценки для арифметических функций

В нагрузку к описанным выше функциям Мёбиуса  $\mu$  и Эйлера  $\varphi$  определим также функции:  $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$  — количество (натуральных) делителей числа  $n$ ,  $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$  — сумма делителей числа  $n$ ,  $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$  — количество различных простых делителей числа  $n$ ,  $\Omega(n) = \sum_{p|n} \nu_p(n)$  — количество простых делителей числа  $n$  с учётом кратностей. (Функции  $\tau$  и  $\sigma$ , очевидно, мультипликативны, функция  $\omega$  аддитивна, т. е.  $\omega(ab) = \omega(a) + \omega(b)$  при  $(a, b) = 1$ , а функция  $\Omega$  вполне аддитивна.)

В некоторых из следующих задач уместно применить асимптотический закон распределения простых чисел (азрпч), что указано явно.

**Задача 1.16.** Доказать, что  $\Omega(n) \leq \ln n / \ln 2$ , причём для бесконечно многих  $n$  достигается равенство.

**Задача 1.17** (оценки для  $\omega(n)$ ).

- 1) Доказать оценку

$$\omega(n) = O\left(\frac{\ln n}{\ln \ln n}\right), \quad n \geq 3.$$

(Указание. Использовать неравенство  $n \geq p_1 \cdots p_{\omega(n)}$ , где  $p_k$  —  $k$ -е простое число.)

- 2) Доказать, что для некоторой постоянной  $c > 0$  существует бесконечно много  $n$ , удовлетворяющих неравенству

$$\omega(n) \geq \frac{c \ln n}{\ln \ln n}.$$

- 3) Используя азрпч, доказать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(n)}{\ln n / \ln \ln n} = 1.$$

**Задача 1.18** (оценки для  $\varphi(n)$ ).

- 1) Найти все предельные точки последовательности  $\left\{\frac{\varphi(n)}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ .

- 2) Доказать оценку

$$\frac{n}{\varphi(n)} = O(\ln \ln n), \quad n \geq 3.$$

- 3) Доказать, что для некоторой постоянной  $c > 0$  существует бесконечно много  $n$ , удовлетворяющих неравенству

$$\varphi(n) \leq \frac{cn}{\ln \ln n}.$$

4) Доказать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n / \ln \ln n}{\varphi(n)} = A,$$

где  $A$  — постоянная из задачи 1.13.

**Задача 1.19** (оценки для  $\sigma(n)$ ).

1) Доказать, что для некоторой постоянной  $c > 0$  выполнено

$$c \leq \frac{\sigma(n) \varphi(n)}{n^2} \leq 1.$$

2) Доказать, что

$$0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n \ln \ln n} < +\infty.$$

3) Доказать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n \ln \ln n} = A,$$

где  $A$  — постоянная из задачи 1.13.

**Задача 1.20** (оценки для  $\tau(n)$ ).

1) Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено  $\tau(n) = O(n^\varepsilon)$  (иными словами:  $\ln \tau(n) = o(\ln n)$  при  $n \rightarrow \infty$ ).

2) Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  при  $n \geq n_0(\varepsilon)$  справедливо неравенство

$$\ln \tau(n) \leq (\ln 2 + \varepsilon) \frac{\ln n}{\ln \ln n}.$$

*(Указание. Представить  $\tau(n)$  в виде произведения по простым  $p \mid n$  и разбить его на  $p \leq p_0$  и  $p > p_0$ , подобрав  $p_0 = p_0(n)$  таким образом, что  $\pi(p_0) \ln \ln n = o(\ln n / \ln \ln n)$  и  $\ln p_0 \sim \ln \ln n$ . Для маленьких  $p$  использовать грубую оценку  $\nu_p(n) = O(\ln n)$ . Для больших  $p$  использовать неравенство  $\ln(\nu_p(n) + 1) \leq \frac{\ln 2}{\ln p_0} \ln p^{\nu_p(n)}$ .)*

3) Доказать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau(n)}{\ln n / \ln \ln n} > 0.$$

4) Используя аэрич, доказать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \tau(n)}{\ln n / \ln \ln n} = \ln 2.$$

## 1.4 Суммы с арифметическими функциями: Начало

**Задача 1.21.** Доказать равенства:

1)  $\sum_{n \leq x} \omega(n) = x \ln \ln x + c_0 x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$ ,  $x \geq 2$ , где  $c_0$  — постоянная из задачи 1.12.

2)  $\sum_{n \leq x} \Omega(n) = x \ln \ln x + c_1 x + O\left(\frac{x}{\ln x}\right)$ ,  $x \geq 2$ , где  $c_1$  — некоторая постоянная.

**Задача 1.22.**

- 1) Доказать, что  $\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + O(x)$ .
- 2) Показать, что сумма  $\sum_{n \leq x} \tau(n)$  равна количеству точек  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ , расположенных (на плоскости  $Oab$ ) под гиперболой  $ab = x$ , включая точки на гиперболе.
- 3) Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left[ \frac{x}{n} \right] - [\sqrt{x}]^2 = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера(–Маскерони) из п. 2 задачи 1.11.

- 4) Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} \frac{\tau(n)}{n} = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + 2\gamma \ln x + c + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

где  $c$  — некоторая постоянная.

- 5) Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} \left\{ \frac{x}{n} \right\} = (1 - \gamma)x + O(\sqrt{x}),$$

где  $\{x\} = x - [x]$  — дробная часть числа  $x$ .

**Задача 1.23.**

- 1) Используя равенство<sup>1</sup>  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , доказать, что

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \ln x), \quad x \geq 2.$$

(Указание. Использовать равенство  $\sigma(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d}$ .)

- 2) Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} n \left\{ \frac{x}{n} \right\} = \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \right) x^2 + O(x \ln x), \quad x \geq 2,$$

где  $\{x\} = x - [x]$  — дробная часть числа  $x$ .

**Задача 1.24.**

- 1) Доказать тождество

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left[ \frac{x}{n} \right] = 1.$$

(Указание. Использовать равенство (1.1).)

- 2) Доказать, что при  $x \geq 2$  справедливо неравенство

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| < 1.$$

(Уточнение этого неравенства см. в главе 3.)

<sup>1</sup>Для его доказательства можно разложить функцию  $f(x) = x$  в ряд Фурье на промежутке  $(-\pi, \pi)$  и применить равенство Парсеваля.

## 1.5 Разное

Пока не придумал, что с этим делать.

**Задача 1.25.** Пусть  $a < b$  — целые числа,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — монотонная функция. Доказать неравенство

$$\left| f(a) + f(a+1) + \dots + f(b-1) - \int_a^b f(u) \, du \right| \leq |f(a) - f(b)|.$$

**Задача 1.26.** Доказать оценку  $\psi(x) - \theta(x) = O(x^{1/2})$ .

**Задача 1.27.** Доказать неравенство  $\sum_{p|n} \frac{\ln p}{p} \leq \ln \ln n + O(1)$ .

## Глава 2

# Вокруг дзета-функции Римана и асимптотического закона

### 2.1 Ряды Дирихле

В этом параграфе предполагается знакомство с основными свойствами дзета-функции Римана  $\zeta(s)$  (включая аналитическое продолжение в область  $\Re s > 0$ ).

#### Задача 2.1.

- 1) Пусть ряды Дирихле  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$  и  $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$  сходятся абсолютно при некотором  $s \in \mathbb{C}$ . Доказать, что (при том же  $s$ )

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f \star g)(n)}{n^s},$$

где  $f \star g$  — свёртка Дирихле функций  $f$  и  $g$ , причём последний ряд сходится абсолютно.

- 2) Пусть  $f$  — мультипликативная функция, причём  $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < +\infty$ . Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 + f(p) + f(p^2) + \dots);$$

в частности, если  $f$  вполне мультипликативна, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p (1 - f(p))^{-1}.$$

- 3) Доказать равенства:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}, \Re s > 1;$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}, \Re s > 2;$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s), \Re s > 1;$

$$\begin{aligned} \text{г)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} = \zeta(s) \zeta(s-1), \Re s > 2; \\ \text{д)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}, \Re s > 1; \\ \text{е)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}, \Re s > 1; \\ \text{ё)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}, \Re s > 1; \\ \text{ж)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta(s) \zeta(s-1) \zeta(s-2)}{\zeta(2s-2)}, \Re s > 3; \\ \text{з)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)}, \Re s > 1; \\ \text{и)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^2(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s) \zeta^2(s-1) \zeta(s-2)}{\zeta(2s-2)}, \Re s > 3; \\ \text{й)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n) \sigma(n)}{n^s} = \frac{\zeta^2(s) \zeta^2(s-1)}{\zeta(2s-1)}, \Re s > 2. \end{aligned}$$

4) Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Преобразуя ряды в произведения, доказать равенства:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(mn)}{n^s} = \frac{\mu(m)}{\zeta(s) \prod_{p|m} (1-p^{-s})}, \Re s > 1; \\ \text{б)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(mn)}{n^s} = \frac{\varphi(m) \zeta(s-1)}{\zeta(s) \prod_{p|m} (1-p^{-s})}, \Re s > 2; \\ \text{в)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(mn)}{n^s} = \zeta^2(s) \prod_{p|m} (\nu_p(m) + 1 - \nu_p(m)p^{-s}), \Re s > 1; \\ \text{г)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(mn)}{n^s} = \zeta(s) \zeta(s-1) \prod_{p|m} (\sigma(p^{\nu_p(m)}) - \sigma(p^{\nu_p(m)-1})p^{1-s}), \Re s > 2. \end{aligned}$$

**Задача 2.2.** Объяснить и запомнить равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}.$$

**Задача 2.3.**

1) Пусть  $f$  — мультипликативная функция, такая что  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = 0$ , причём ряд сходится абсолютно. Доказать, что найдётся простое число  $p$ , такое что

$$1 + f(p) + f(p^2) + \dots = 0.$$

(Замечание. Условие абсолютной сходимости отбросить нельзя: см. главу 3.)

2) Пусть  $f$  — вполне мультипликативная функция, такая что  $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < +\infty$ . Доказать, что  $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \neq 0$ . (Замечание. Условие абсолютной сходимости отбросить нельзя, как показывает пример  $f(n) = \lambda(n)/n$ , где  $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$  — так называемая функция Лиувилля.)

**Задача 2.4.** Доказать, что при (вещественном)  $s \rightarrow 1 + 0$  выполнено:

- 1)  $\ln \zeta(s) = \sum_p p^{-s} + O(1)$ ;
- 2)  $\sum_p p^{-s} = -\ln(s-1) + O(1)$ .

**Задача 2.5** (сходимость рядов Дирихле в комплексной плоскости).

- 1) Доказать, что при любом  $t \in \mathbb{R}$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-ti}$  расходится. (Указание. Например, воспользоваться тем, что  $\ln n$  очень медленно меняется.)
- 2) Найти области сходимости рядов Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s}$ ,  $s \in \mathbb{C}$ . (Указание. Для второго ряда применить преобразование Абеля.)
- 3) Пусть  $a_n \in \mathbb{C}$  таковы, что все частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ограничены некоторой постоянной. Доказать, что для любых чисел  $\theta \in (0, \pi/2)$ ,  $\delta > 0$  ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  сходится равномерно при  $\Re s \geq \delta$ ,  $|\arg s| \leq \theta$ .
- 4) Допустим, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится. Доказать, что для любого  $\theta \in (0, \pi/2)$  ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  сходится равномерно при  $|\arg s| \leq \theta$ .
- 5) Пусть  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Доказать, что существует  $\sigma_0 \in [-\infty, +\infty]$ , такое что ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  сходится при  $\Re s > \sigma_0$  и расходится при  $\Re s < \sigma_0$  ( $\sigma_0$  называется абсциссой сходимости). Кроме того, при  $\Re s > \sigma_0$  сумма ряда является аналитической функцией, причём ряд можно почленно дифференцировать произвольное число раз.

**Задача 2.6.**

- 1) Доказать, что при  $\Re s > 0$  справедливо равенство

$$(2^{1-s} - 1) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s}.$$

- 2) Доказать, что  $\zeta(\sigma) < 0$  при  $\sigma \in (0, 1)$ .
- 3) Найти все нули функции

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1-ti}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Задача 2.7.**

- 1) Пусть  $a < b$  — вещественные числа,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывно дифференцируемая функция. Доказать справедливость формулы суммирования Эйлера

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b f(x) dx + \rho(x)f(x) \Big|_{x=a}^b - \int_a^b \rho(x)f'(x) dx,$$

где  $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$ .

- 2) Доказать, что в области  $\Re s > 0$  справедливо равенство

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + s \int_1^{+\infty} \frac{\rho(x) dx}{x^{s+1}}.$$

- 3) Доказать, что формула п. 2 даёт аналитическое продолжение  $\zeta(s)$  в область  $\Re s > -1$ , причём  $\zeta(0) = -1/2$ .

**Задача 2.8.**

1) Пусть  $\sigma \in (0, 1)$ . Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} = \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \zeta(\sigma) + O\left(\frac{1}{x^\sigma}\right).$$

2) Доказать, что

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1), \quad s \rightarrow 1,$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера (см. п. 2 задачи 1.11).

**Задача 2.9.** Пусть  $f$  — ограниченная вполне мультипликативная функция (или, равносильно,  $\max_{n \in \mathbb{N}} |f(n)| = 1$ ),  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ . Доказать, что при  $\Re s > 1$  выполнено  $F(s) \neq 0$ , а также справедливы равенства:

$$1) \frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\mu(n)}{n^s};$$

$$2) -\frac{F'(s)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\Lambda(n)}{n^s}.$$

**Задача 2.10.**

1) Доказать, что при  $\sigma > 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$  справедливо неравенство

$$\Re \left( 3 \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} + 4 \frac{\zeta'(\sigma + ti)}{\zeta(\sigma + ti)} + \frac{\zeta'(\sigma + 2ti)}{\zeta(\sigma + 2ti)} \right) \leq 0.$$

2) Пусть точка  $s_0$  является нулём кратности  $m$  либо полюсом порядка  $|m| = -m$  для (аналитической) функции  $f(s)$ ,  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Доказать, что в точке  $s_0$  логарифмическая производная  $f'(s)/f(s)$  имеет полюс первого порядка с вычетом  $m$ .

3) Вывести из пунктов 1 и 2 отсутствие нулей  $\zeta(s)$  на прямой  $\Re s = 1$ .

**Задача 2.11** (вокруг гипотезы Римана).

1) Доказать, что для любого  $a \geq 0$  следующие два утверждения равносильны:

а) для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено  $\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(x^{a+\varepsilon})$ ;

б) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s}$  сходится при  $\Re s > a$ .

2) Доказать, что из утверждения 1б следует отсутствие нулей  $\zeta(s)$  при  $\Re s > a$ . (Обратное тоже верно, но доказательство сложное.)

**2.2 Различные асимптотики****Задача 2.12** (избавление от условия взаимной простоты).

1) Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x), \quad x \geq 2.$$

(Указание. Использовать представление для  $\varphi(n)$  в виде суммы с функцией Мёбиуса.)

- 2) Пусть  $N(x, m)$  — количество натуральных чисел, не превосходящих  $x \geq 1$  и взаимно простых с  $m \in \mathbb{N}$ . Доказать, что

$$N(x, m) = \sum_{d|m} \mu(d) \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor.$$

(Указание.  $N(x, m) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|(n, m)} \mu(d)$ .)

- 3) Доказать, что количество несократимых дробей  $a/b \in (0, c]$  со знаменателем  $b \leq x$  равно

$$\frac{3c}{\pi^2} x^2 + O(x \ln x), \quad c \in (0, 1], \quad x \geq 2.$$

- 4) Точка  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  называется *целой*, если все её координаты целые (то есть  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ ). Целая точка  $(x_1, \dots, x_n)$  называется *примитивной*, если её координаты взаимно просты в совокупности (то есть  $\text{н.о.д.}(x_1, \dots, x_n) = 1$ ). Доказать утверждения:

- а) Количество целых точек в круге  $x^2 + y^2 \leq R^2$  равно  $\pi R^2 + O(R)$ ,  $R \geq 1$ . (Указание. Для каждой целой точки  $(x_0, y_0)$  рассмотреть квадратик  $\max\{|x - x_0|, |y - y_0|\} \leq 1/2$ .)  
 б) Количество примитивных целых точек в круге  $x^2 + y^2 \leq R^2$  равно  $\frac{6}{\pi} R^2 + O(R \ln R)$ ,  $R \geq 2$ .

- 5) Пусть  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  — ограниченное выпуклое множество с непустой внутреннейстью (такие множества измеримы по Жордану и имеют положительную меру Жордана  $\text{vol } \Omega$ ),  $n \geq 2$ . Доказать утверждения:

- а) Если  $N(t)$  — количество целых точек в  $t\Omega$ , то

$$N(t) \sim \text{vol } \Omega \cdot t^n, \quad t \rightarrow +\infty.$$

- б) Если  $N^*(t)$  — количество примитивных целых точек в  $t\Omega$ , то

$$N^*(t) \sim \frac{\text{vol } \Omega}{\zeta(n)} \cdot t^n, \quad t \rightarrow +\infty.$$

**Задача 2.13.** Доказать, что асимптотический закон распределения простых чисел эквивалентен асимптотике для  $n$ -го простого числа  $p_n \sim n \ln n$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Задача 2.14.** С помощью асимптотического закона распределения простых чисел доказать асимптотические равенства (при  $x \rightarrow +\infty$ ):

$$1) \sum_{p \leq x} p \sim \frac{x^2}{2 \ln x};$$

$$2) \sum_{p \leq x} p \ln p \sim \frac{x^2}{2};$$

$$3) \sum_{p \leq x} \frac{p}{\ln p} \sim \frac{x^2}{2(\ln x)^2}.$$

**Задача 2.15** (уточнение задачи 1.6). Доказать эквивалентность следующих трёх утверждений:

1) Несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{(\psi(x)-x) dx}{x^2}$  сходится.

2) Несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{(\theta(x)-x) dx}{x^2}$  сходится.

3) Существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sum_{p \leq x} \frac{\ln p}{p} - \ln x \right)$ .

(Замечание. Поскольку утверждение 1 доказывается на лекциях, то все три утверждения справедливы.)

**Задача 2.16** (суммы с бесквадратными числами).

1) Доказать равенство  $\mu^2(n) = \sum_{d^2|n} \mu(d)$ .

2) Пусть  $Q(x)$  — количество бесквадратных (натуральных) чисел (то есть не делящихся на квадрат никакого простого числа), не превосходящих  $x$ . Доказать, что

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2} x + O(\sqrt{x}).$$

(Указание.  $Q(x) = \sum_{n \leq x} \mu^2(n)$ .)

3) Доказать асимптотические формулы для сумм по бесквадратным числам:

а)  $\sum_{\text{бескв. } n \leq x} n = \frac{3}{\pi^2} x^2 + O(x\sqrt{x});$

б)  $\sum_{\text{бескв. } n \leq x} \frac{1}{n} = \frac{6}{\pi^2} \ln x + c + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ , где  $c$  — некоторая постоянная.

**Задача 2.17** (вычисление постоянной в задаче 1.13). Доказать равенства:

1)  $\ln \zeta(s) = -\ln(s-1) + o(1) = \sum_p p^{-s} + \sum_p \left( -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} \right) + o(1)$ ,  $s \rightarrow 1 + 0$ ;

2)  $\sum_p p^{-s} = (s-1) \int_1^{+\infty} u^{-s} \ln \ln u \, du + c_0 + o(1) = -\ln(s-1) - \gamma + c_0 + o(1)$ ,  $s \rightarrow 1 + 0$ , где  $c_0$  — постоянная из задачи 1.12, а  $\gamma = -\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\Gamma'(1)$  — постоянная Эйлера<sup>1</sup>;

3)  $\sum_p \left( -\ln\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} \right) = \ln A - c_0$ , где  $A$  — постоянная из задачи 1.13;

4)  $A = e^\gamma$ , то есть справедлива теорема Мертенса

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\ln x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

**Задача 2.18.** Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \quad \left( = \frac{315\zeta(3)}{2\pi^4} \right).$$

(Указание.  $\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$ . Вычисление  $\zeta(6)$  см. в задаче 2.22.)

<sup>1</sup>Непосредственное доказательство равенства  $\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma$  может быть таким:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{(1-t^n)}{1-t} dt = \int_0^1 \frac{(1-(x/n)^n)}{x} dx = \int_0^1 (1-(1-x/n)^n) d(\ln x) = \ln n - \int_0^1 \ln x \cdot (1-x/n)^{n-1} dx.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получаем требуемое.

### 2.3 Числа Бернулли и формула Эйлера–Маклорена

**Задача 2.19.** Допустим, что ряды  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$  и  $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$  сходятся абсолютно при некотором  $z \in \mathbb{C}$ . Доказать, что (при том же  $z$ )

$$A(z)B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n,$$

где  $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$ . (Замечание. Согласно теореме Мертенса, достаточно требовать абсолютную сходимость только для одного ряда, от второго нужна просто сходимость. Из второй теоремы Абеля следует, что равенство справедливо также в случае, когда все три ряда сходятся.)

Числа Бернулли — рациональные числа  $B_n$ , определённые с помощью равенства

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

В частности:  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -1/2$ ,  $B_2 = 1/6$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = -1/30$ ,  $B_5 = 0$ ,  $B_6 = 1/42$ .

**Задача 2.20** (простейшие свойства чисел Бернулли). Доказать, что:

- 1)  $B_{2n+1} = 0$  при  $n \geq 1$ ;
- 2)  $(-1)^n B_n = B_n$  при  $n \neq 1$ ;
- 3)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k = (-1)^n B_n$  при  $n \geq 0$ ;
- 4)  $z \operatorname{ctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2z)^{2n}$ ,  $|z| < \pi$ ;
- 5)  $\operatorname{tg} z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$ ,  $|z| < \pi/2$ .

Многочлены Бернулли  $B_n(x)$  определяются с помощью равенства

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

**Задача 2.21** (простейшие свойства многочленов Бернулли). Доказать, что:

- 1)  $B_n(0) = B_n$  при  $n \geq 0$ ;
- 2)  $B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} x^k$  при  $n \geq 0$ ;
- 3)  $B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(y) x^k$  при  $n \geq 0$ ;
- 4)  $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$  при  $n \geq 0$ ;
- 5)  $B_n(1) = (-1)^n B_n$  при  $n \geq 0$ ;
- 6)  $B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right)$  при  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 0$ ;
- 7)  $B_n(1/2) = (2^{1-n} - 1)B_n$  при  $n \geq 0$ ;
- 8)  $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$  при  $n \geq 1$ ;

9) при  $N, d \in \mathbb{N}$  справедлива формула Бернулли (aka Faulhaber's formula)

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^{d-1} = \frac{B_d(N) - B_d}{d},$$

где положено  $0^{d-1} = \begin{cases} 1, & d = 1, \\ 0, & d > 1; \end{cases}$

10)  $\frac{d}{dx} B_n(x) = n B_{n-1}(x)$  при  $n \geq 1$ ;

11)  $\int_a^b B_n(x) dx = \frac{B_{n+1}(b) - B_{n+1}(a)}{n+1}$  при  $n \geq 0$ ;

12)  $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$  при  $n \geq 1$ ;

13)  $\int_0^1 B_n(x) B_m(x) dx = (-1)^{n+1} \frac{n!m!}{(n+m)!} B_{n+m}$  при  $n, m \geq 1$ ;

14)  $(-1)^{n+1} B_{2n} > 0$  при  $n \geq 1$ .

**Задача 2.22.** Доказать, что ряд Фурье для  $B_n(x)$  на промежутке  $(0, 1)$  при  $n \geq 1$  равен

$$-\frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{2\pi i k x}}{k^n}.$$

Вывести отсюда следствия:

1)  $\zeta(2n) = -\frac{(2\pi i)^{2n}}{2} \cdot \frac{B_{2n}}{(2n)!}$  при  $n \in \mathbb{N}$  (в частности,  $\zeta(2n)\pi^{-2n} \in \mathbb{Q}$ );

2)  $(-1)^{n+1} B_{2n} > 0$  при  $n \geq 1$ ;

3)  $|B_{2n}| \sim \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

4)  $|B_n(x)| \leq 2\zeta(n) \frac{n!}{(2\pi)^n}$  при  $x \in [0, 1]$ ,  $n \geq 2$ .

**Задача 2.23** (формула суммирования Эйлера–Маклорена).

1) Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^{(m)}([0, 1], \mathbb{C})$ . Доказать, что

$$\frac{f(0) + f(1)}{2} = \int_0^1 f(x) dx + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(x) \Big|_{x=0}^1 + (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{B_m(x)}{m!} f^{(m)}(x) dx.$$

2) Пусть  $a < b$  — целые числа,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^{(m)}([a, b], \mathbb{C})$ . Доказать, что

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(x) \Big|_{x=a}^b + (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x) dx,$$

где  $\{x\} = x - [x]$  — дробная часть числа  $x$ .

3) Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $f \in C^{(m)}([1, +\infty), \mathbb{C})$ , причём  $\int_1^{+\infty} |f^{(m)}(x)| dx < +\infty$ . Доказать, что для всякого  $N \in \mathbb{N}$  верно

$$\sum_{n=1}^N f(n) = \int_1^N f(x) dx + C(m) + \frac{1}{2} f(N) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(N) + R_N(m),$$

где

$$C(m) = \frac{1}{2} f(1) - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(1) + (-1)^{m+1} \int_1^{+\infty} \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x) dx,$$

$$|R_N(m)| \leq \frac{4}{(2\pi)^m} \int_N^{+\infty} |f^{(m)}(x)| dx.$$

**Задача 2.24** (формула Стирлинга). Доказать, что для произвольного фиксированного  $m \in \mathbb{N}$  при  $N \rightarrow \infty$  выполнено

$$\ln N! = \left(N + \frac{1}{2}\right) \ln N - N + C_0 + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)N^{2k-1}} + O\left(\frac{1}{N^{2m+1}}\right),$$

где  $C_0$  — некоторая постоянная (как вам известно из курса математического анализа, на самом деле  $C_0 = \ln \sqrt{2\pi}$ ).

**Задача 2.25** (продолжение задачи 2.7). Доказать, что  $\zeta'(0) = -C_0$ , где  $C_0$  — постоянная из задачи 2.24 (то есть  $\zeta'(0) = -\ln \sqrt{2\pi}$ ). (Указание.  $\zeta'(0) = -1 - \int_1^{+\infty} \frac{B_1(\{x\}) dx}{x}$ .)

**Задача 2.26** (аналитическое продолжение  $\zeta(s)$ ). Доказать, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{1-s}{k} B_k - \binom{s+n}{n+1} \int_1^{+\infty} \frac{B_{n+1}(\{x\}) dx}{x^{s+n+1}},$$

дающее аналитическое продолжение  $\zeta(s)$  в область  $\Re s > -n$  (за исключением простого полюса в точке  $s = 1$ ). Вывести отсюда следствия:

1) При  $n \in \mathbb{N}$  выполнено

$$\zeta(1-n) = (-1)^{n+1} \frac{B_n}{n} = \begin{cases} -1/2, & n = 1, \\ -B_n/n, & n > 1. \end{cases}$$

2)  $\zeta(-2n) = 0$  при  $n \in \mathbb{N}$  (тривиальные нули  $\zeta(s)$ ).

3) При целом  $n \geq 2$  выполнено

$$\zeta(1-n) = 2^{1-n} \pi^{-n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \Gamma(n) \zeta(n).$$

(Замечание. Равенство (функциональное уравнение Римана)

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s),$$

или, более симметрично,

$$\pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s),$$

справедливо для всех  $s \in \mathbb{C}$ .)

*Замечание.* Вспоминая задачу 2.6, получаем, что ряд Дирихле  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-s}$  сходится лишь при  $\Re s > 0$ , однако его сумма может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость и не имеет особенностей (то есть является целой функцией).

## Глава 3

# Дополнительные вопросы аналитической теории чисел

### 3.1 Суммы с функцией Мёбиуса

Цель этого параграфа — доказательство оценки  $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) = o(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , а также равенства  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n = 0$  (задачи 3.8 и 3.9). Доказательство очень слабо отличается от доказательства асимптотического закона, которое рассказывается на лекциях.

Введём функцию  $F(s) = \frac{1}{s \zeta(s)}$ .

**Задача 3.1.** Доказать, что функция  $F(s)$  голоморфна при  $\Re s \geq 1$ , причём  $F(1) = 0$ ; кроме того, при  $\Re s > 1$  справедливы равенства

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \int_1^{+\infty} \frac{M(x) dx}{x^{s+1}}.$$

Далее нам понадобятся функции

$$F_T(s) = \int_1^T \frac{M(x) dx}{x^{s+1}}, \quad T > 1.$$

Все они являются целыми (как функции от  $s$ ). (Почему?)

**Задача 3.2.** Доказать неравенства:

1) если  $\sigma = \Re s > 0$ , то

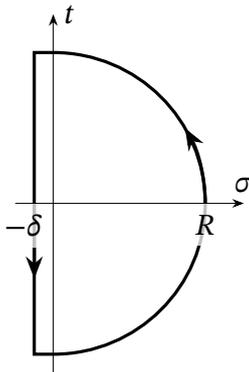
$$|F_T(s+1) - F(s+1)| \leq \frac{T^{-\sigma}}{\sigma};$$

2) если  $\sigma = \Re s < 0$ , то

$$|F_T(s+1)| \leq \frac{T^{-\sigma}}{-\sigma}.$$

Наша ближайшая цель — доказать равенство (задача 3.7)

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} F_T(1) = F(1) \quad (= 0).$$



Для этого фиксируем  $\varepsilon > 0$  и положим  $R = 1/\varepsilon$ . Кроме того, фиксируем  $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1)$ , такое что функция  $\zeta(s)$  не имеет нулей в прямоугольнике  $1 - \delta \leq \sigma \leq 1$ ,  $|t| \leq R$  (где, как обычно,  $s = \sigma + ti$ ).

Далее, рассмотрим контур  $\Gamma$ , состоящий из правой половины окружности  $|s| = R$  и ломаной, соединяющей точки  $\pm Ri$ ,  $-\delta \pm Ri$  (см. картинку слева), пробегаемый против часовой стрелки. Кроме того, обозначим через  $\Gamma_+$  и  $\Gamma_-$  соответственно «положительную» и «отрицательную» части этого контура (т. е. с  $\sigma > 0$  и  $\sigma < 0$ ).

**Задача 3.3.** Доказать равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (F_T(s+1) - F(s+1)) \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right) T^s ds = F_T(1) - F(1).$$

**Задача 3.4.** Доказать, что при  $|s| = R$  выполнено

$$\frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} = \frac{2 \Re s}{R^2}.$$

**Задача 3.5.** Используя задачи 3.2 и 3.4, доказать неравенства:

- 1)  $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} (F_T(s+1) - F(s+1)) \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right) T^s ds \right| \leq \frac{1}{R} = \varepsilon;$
- 2)  $\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} F_T(s+1) \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right) T^s ds \right| \leq \frac{1}{R} = \varepsilon.$

(Указание. В п. 2 заменить контур  $\Gamma_-$  на левую полуокружность  $|s| = R$ ,  $\Re s < 0$ .)

**Задача 3.6.** Доказать, что

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} F(s+1) \left( \frac{s}{R^2} + \frac{1}{s} \right) T^s ds = 0.$$

(Указание.  $\int_{-\infty}^0 T^\sigma d\sigma = \frac{1}{\ln T}$ .)

**Задача 3.7.** Используя задачи 3.3, 3.5 и 3.6, доказать равенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{M(x) dx}{x^2} = 0.$$

**Задача 3.8.** Используя задачу 3.7, доказать оценку  $M(x) = o(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ . (Указание. Фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Рассмотреть интеграл  $\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{M(y) dy}{y^2} = o(1)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , и воспользоваться неравенством  $|M(x) - M(y)| \leq |x - y| + 1$ .)

**Задача 3.9.** Используя задачи 3.7 и 3.8, доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

**Задача 3.10.** Доказать, что равенства

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = s \int_1^{+\infty} \frac{M(x) dx}{x^{s+1}}$$

справедливы для произвольного  $s \in \mathbb{C}$  с  $\Re s \geq 1$ . (Указание. Повторить предыдущие рассуждения, заменив  $F(s+1)$  и  $F_T(s+1)$  на  $F(s+1+t_0i)$  и  $F_T(s+1+t_0i)$  соответственно.)

## 3.2 Тауберовы теоремы

Утверждения задач этого параграфа обобщают результаты предыдущего параграфа и доказываются аналогично.

**Задача 3.11** (тауберова теорема для преобразования Лапласа). Пусть измеримая функция  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$  удовлетворяет условию  $f(x) = O(x)$ . Допустим, что функция  $F(s)$ , определённая при  $\Re s > 1$  с помощью равенства

$$F(s) = \int_1^{+\infty} \frac{f(x) dx}{x^{s+1}}, \quad (3.1)$$

аналитически продолжается до голоморфной при  $\Re s \geq 1$ . Доказать, что равенство (3.1) остаётся справедливым и при  $\Re s = 1$ . (Замечание. Основная сложность — доказать сходимость интеграла.)

**Задача 3.12** (тауберова теорема для рядов Дирихле). Пусть последовательность  $a_n \in \mathbb{C}$  ограничена, причём функция  $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  (очевидно голоморфная при  $\Re s > 1$ ) аналитически продолжается до голоморфной при  $\Re s \geq 1$ . Доказать, что:

- 1)  $\sum_{n \leq x} a_n = o(x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ;
- 2) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  сходится при  $\Re s = 1$  (и его сумма равна  $F(s)$ ).

**Задача 3.13** (тауберова теорема для рядов Дирихле с вещественными коэффициентами). Пусть последовательность  $a_n \in \mathbb{R}$  ограничена снизу, причём  $\sum_{n \leq x} a_n = O(x)$ . Допустим, что функция

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

(голоморфная при  $\Re s > 1$ , в чём можно убедиться с помощью преобразования Абеля) аналитически продолжается до голоморфной при  $\Re s \geq 1$ . Доказать, что:

- 1)  $\sum_{n \leq x} a_n = o(x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ ;
- 2) ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$  сходится при  $\Re s \geq 1$  (и его сумма равна  $F(s)$ ).

(Указание. Пусть  $a_n \geq -C$ , где  $C \geq 0$ . Положим  $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$ . Нетривиально только доказательство оценки  $A(x) = o(x)$ . Фиксируем  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Рассмотрим интеграл  $\int_x^{(1+\varepsilon)x} \frac{A(y) dy}{y^2} = o(1)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , и с помощью неравенства  $A(y) - A(x) \geq -C(y - x + 1)$ ,  $y \geq x$ , доказать, что  $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{x} \leq C\varepsilon$ . Аналогично с помощью интеграла  $\int_{(1-\varepsilon)x}^x \frac{A(y) dy}{y^2}$  доказать неравенство  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{A(x)}{x} \geq -C\varepsilon$ .)

**Задача 3.14.** Вывести из задачи 3.13 и оценок Чебышёва асимптотический закон распределения простых чисел. (Указание. Взять  $a_n = \Lambda(n) - 1$ .)

## Глава 4

# Характеры

### 4.1 Дела давно минувших дней...

Вспомним основные факты про первообразные корни (п. к.) и смежные вопросы.

Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, m) = 1$ . Показателем (или мультипликативным порядком) числа  $a$  по модулю  $m$  называется наименьшее  $d \in \mathbb{N}$ , такое что выполняется сравнение  $a^d \equiv 1 \pmod{m}$ . Проще говоря, это порядок элемента  $\bar{a} = \bar{a}_m = a + m\mathbb{Z}$  в группе  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ . Обозначение:  $\text{ord}_m a = d$ .

Если  $\text{ord}_m a = d$ , то  $a^n \equiv 1 \pmod{m}$  тогда и только тогда, когда  $d \mid n$ . В частности, всегда  $d \mid \varphi(m)$  (это просто следствие теоремы Лагранжа для группы  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ ).

Если для какого-то  $g \in \mathbb{Z}$  вдруг оказалось, что  $\text{ord}_m g = \varphi(m)$ , то  $g$  называется первообразным корнем по модулю  $m$ . Другими словами,  $g$  — п. к. по модулю  $m$ , если  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \langle \bar{g} \rangle$ .

П. к. существуют только для модулей  $m = 1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$  (где  $p > 2$  — простое число,  $\alpha \in \mathbb{N}$ ), то есть только для таких  $m$  группа  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  циклическая (считаем, что  $(\mathbb{Z}/1\mathbb{Z})^* = \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{\bar{1}\}$ ). В этом случае количество различных (по модулю  $m$ ) п. к., очевидно, равно  $\varphi(\varphi(m))$ .

Для простого модуля п. к. ищется методом проб и ушибов с помощью критерия (для небольших  $m$  можно просто пользоваться определением).

**Критерий.** Пусть  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, m) = 1$ . Тогда  $a$  — п. к. по модулю  $m$ , если и только если для каждого простого  $q \mid \varphi(m)$  выполнено

$$a^{\frac{\varphi(m)}{q}} \not\equiv 1 \pmod{m}.$$

Для делителя  $q = 2$  условие удобно проверять, используя символ Якоби: если  $m = p > 2$  — простое число, то

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p}$$

(критерий Эйлера для символа Лежандра). Символ Якоби, в частности символ Лежандра, проще всего вычислять с помощью следующих свойств:

- если  $a \equiv b \pmod{P}$ , то  $\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{b}{P}\right)$ ;
- $\left(\frac{ab}{P}\right) = \left(\frac{a}{P}\right)\left(\frac{b}{P}\right)$ ;
- $\left(\frac{-1}{P}\right) = \begin{cases} 1, & P \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1, & P \equiv -1 \pmod{4}; \end{cases}$

- $\left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1, & p \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ -1, & p \equiv \pm 3 \pmod{8}; \end{cases}$
- (квадратичный закон взаимности) если  $P, Q$  — нечётные натуральные числа, то

$$\left(\frac{P}{Q}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{Q}{P}\right), & P \equiv Q \equiv -1 \pmod{4}, \\ \left(\frac{Q}{P}\right) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть  $g$  — п. к. по модулю  $p$  ( $p > 2$ ). Тогда:

- если  $g^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ , то  $g$  является п. к. по модулю  $p^\alpha$  для любого  $\alpha$ ;
- если же  $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ , то  $g + p$  является п. к. по модулю  $p^\alpha$  для любого  $\alpha$  (то же верно и для  $g + 2p, g + 3p, \dots, g + (p-1)p$ ).

Наконец, если  $g$  — п. к. по модулю  $p^\alpha$ , то нечётное из двух чисел  $g, g + p^\alpha$  является п. к. по модулю  $2p^\alpha$ .

**Задача 4.1.** Найти п. к. (по одной штуке) по модулям: 11, 19, 31, 41, 81, 101, 121, 250, 343. (Возможные ответы соответственно: 2, 2, 3, 6, 2, 2, 2, 127, 3.)

При  $\alpha \geq 3$  группа  $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^*$  не является циклической, но раскладывается в прямое произведение двух своих циклических подгрупп, порождённых  $\overline{-1}$  и  $\overline{5}$ :

$$(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^* = \langle \overline{-1} \rangle_2 \times \langle \overline{5} \rangle_{2^{\alpha-2}}.$$

Формула  $(\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z})^* = \langle \overline{-1} \rangle \times \langle \overline{5} \rangle$  справедлива и для  $\alpha \leq 2$ , просто в этом случае один или оба прямых сомножителя тривиальны (то есть равны  $\{\overline{1}\}$ ).

## 4.2 Строение группы $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$

Теперь, когда мы знаем всё про группы  $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$  для простых  $p$ , мы легко можем описать структуру группы  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  для произвольного  $m \in \mathbb{N}$ , поскольку

$$(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^* \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \quad (m, n) = 1.$$

(Китайская теорема об остатках; изоморфизм:  $x + mn\mathbb{Z} \leftrightarrow (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$ .)

**Задача 4.2.** Пусть  $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$  — каноническое разложение  $m$  на простые множители. Рассмотрим подгруппы

$$H_i = \{\overline{a} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \mid a \equiv 1 \pmod{mp_i^{-\alpha_i}}\}, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Доказать, что:

- 1)  $H_i \cong (\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z})^*$ , причём изоморфизм можно задать формулой  $x + m\mathbb{Z} \leftrightarrow x + p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}$ ;
- 2)  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = H_1 \times \cdots \times H_s$ . (Здесь имеется в виду внутреннее прямое произведение, то есть прямое произведение подгрупп.)

Что это значит? Пусть  $m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$  ( $2 < p_1 < \cdots < p_s$  — простые числа,  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 1$  при  $i \geq 1$ ). Сначала находим  $g_{-1}, g_0 \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{cases} g_{-1} \equiv -1 \pmod{2^{\alpha_0}}, \\ g_{-1} \equiv 1 \pmod{m2^{-\alpha_0}}, \\ g_0 \equiv 5 \pmod{2^{\alpha_0}}, \\ g_0 \equiv 1 \pmod{m2^{-\alpha_0}}. \end{cases}$$

Далее, для каждого  $i \geq 1$  сначала находим какой-нибудь п. к.  $g_{i,0} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ , а затем ищем  $g_i \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{cases} g_i \equiv g_{i,0} \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \\ g_i \equiv 1 \pmod{mp_i^{-\alpha_i}}. \end{cases}$$

Наконец, положим

$$\begin{aligned} m_{-1} &= \begin{cases} 1, & \alpha_0 \leq 1, \\ 2, & \alpha_0 \geq 2, \end{cases} \\ m_0 &= \begin{cases} 1, & \alpha_0 \leq 2, \\ 2^{\alpha_0-2}, & \alpha_0 \geq 3, \end{cases} \\ m_i &= \varphi(p_i^{\alpha_i}) = p_i^{\alpha_i-1}(p_i - 1), \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Тогда справедливо равенство

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \langle \overline{g_{-1}} \rangle_{m_{-1}} \times \langle \overline{g_0} \rangle_{m_0} \times \langle \overline{g_1} \rangle_{m_1} \times \cdots \times \langle \overline{g_s} \rangle_{m_s}.$$

Другими словами, для любого  $a \in \mathbb{Z}$  с  $(a, m) = 1$  существует представление

$$a \equiv g_{-1}^{\gamma_{-1}} g_0^{\gamma_0} \cdots g_s^{\gamma_s} \pmod{m},$$

причём каждый показатель  $\gamma_i$  определён однозначно по модулю  $m_i$  (удобно считать, что  $0 \leq \gamma_i < m_i$ ). Набор чисел  $\gamma_i$  называется системой индексов числа  $a$  по модулю  $m$  (если быть аккуратным, то надо, конечно, указывать, относительно какой системы образующих, но мы не будем занудствовать). Числа  $\gamma_i$  находятся с помощью перехода к сравнениям по модулям  $p_i^{\alpha_i}$ . Разумеется, если какое-то из чисел  $m_{-1}, m_0$  равно 1, то соответствующую подгруппу (и индексы) можно (и нужно) не рассматривать.

**Задача 4.3.** Разложить группу  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  в прямое произведение циклических подгрупп для  $m = 15, 24, 35, 75, 90, 96, 105, 110, 120, 124, 210, 328, 380, 10976$ . (Возможные ответы:  $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^* = \langle \overline{11} \rangle_2 \times \langle \overline{7} \rangle_4$ ,  $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^* = \langle \overline{7} \rangle_2 \times \langle \overline{13} \rangle_2 \times \langle \overline{17} \rangle_2$ ,  $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z})^* = \langle \overline{22} \rangle_4 \times \langle \overline{31} \rangle_6$ ,  $(\mathbb{Z}/75\mathbb{Z})^* = \langle \overline{26} \rangle_2 \times \langle \overline{52} \rangle_{20}$ ,  $(\mathbb{Z}/90\mathbb{Z})^* = \langle \overline{11} \rangle_6 \times \langle \overline{37} \rangle_4$ ,  $(\mathbb{Z}/96\mathbb{Z})^* = \langle \overline{31} \rangle_2 \times \langle \overline{37} \rangle_8 \times \langle \overline{65} \rangle_2$ ,  $(\mathbb{Z}/105\mathbb{Z})^* = \langle \overline{71} \rangle_2 \times \langle \overline{22} \rangle_4 \times \langle \overline{31} \rangle_6$ ,  $(\mathbb{Z}/110\mathbb{Z})^* = \langle \overline{67} \rangle_4 \times \langle \overline{101} \rangle_{10}$ ,  $(\mathbb{Z}/120\mathbb{Z})^* = \langle \overline{31} \rangle_2 \times \langle \overline{61} \rangle_2 \times \langle \overline{41} \rangle_2 \times \langle \overline{97} \rangle_4$ ,  $(\mathbb{Z}/124\mathbb{Z})^* = \langle \overline{63} \rangle_2 \times \langle \overline{65} \rangle_{30}$ ,  $(\mathbb{Z}/210\mathbb{Z})^* = \langle \overline{71} \rangle_2 \times \langle \overline{127} \rangle_4 \times \langle \overline{31} \rangle_6$ ,  $(\mathbb{Z}/328\mathbb{Z})^* = \langle \overline{247} \rangle_2 \times \langle \overline{165} \rangle_2 \times \langle \overline{129} \rangle_{40}$ ,  $(\mathbb{Z}/380\mathbb{Z})^* = \langle \overline{191} \rangle_2 \times \langle \overline{77} \rangle_4 \times \langle \overline{21} \rangle_{18}$ ,  $(\mathbb{Z}/10976\mathbb{Z})^* = \langle \overline{6175} \rangle_2 \times \langle \overline{9605} \rangle_8 \times \langle \overline{6177} \rangle_{294}$ .)

**Задача 4.4.** Проверить справедливость представления  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  в виде прямого произведения и найти систему индексов числа  $a$  по модулю  $m$  (для данного представления):

- 1)  $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^* = \langle \overline{7} \rangle \times \langle \overline{13} \rangle \times \langle \overline{17} \rangle$ ,  $a = 5$ ;
- 2)  $(\mathbb{Z}/35\mathbb{Z})^* = \langle \overline{22} \rangle \times \langle \overline{31} \rangle$ ,  $a = 23$ ;

$$3) (\mathbb{Z}/96\mathbb{Z})^* = \langle \overline{31} \rangle \times \langle \overline{37} \rangle \times \langle \overline{65} \rangle, a = 11;$$

$$4) (\mathbb{Z}/380\mathbb{Z})^* = \langle \overline{191} \rangle \times \langle \overline{77} \rangle \times \langle \overline{21} \rangle, a = 23.$$

(Ответы:  $5 \equiv 7^0 \cdot 13^1 \cdot 17^1 \pmod{24}$ ,  $23 \equiv 22^3 \cdot 31^2 \pmod{35}$ ,  $11 \equiv 31^1 \cdot 37^5 \cdot 65^1 \pmod{96}$ ,  $23 \equiv 191^1 \cdot 77^3 \cdot 21^2 \pmod{380}$ .)

**Задача 4.5.** Найти экспоненту  $\lambda(m)$  группы  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  (то есть наименьшее число  $d \in \mathbb{N}$ , такое что  $a^d \equiv 1 \pmod{m}$  для всех  $a \in \mathbb{Z}$ , взаимно простых с  $m$ ), если известно каноническое разложение числа  $m$  на простые множители. (Функция  $\lambda$  называется *функцией Кармайкла*.)

**Задача 4.6.** Пусть  $m = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$  ( $2 < p_1 < \cdots < p_s$  — простые числа,  $\alpha_0 \geq 0$ ,  $\alpha_i \geq 1$  при  $i \geq 1$ ). Доказать, что  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  нельзя разложить в прямое произведение менее чем  $s + \delta$

циклических подгрупп, где  $\delta = \begin{cases} 0, & \alpha_0 \leq 1, \\ 1, & \alpha_0 = 2, \\ 2, & \alpha_0 \geq 3. \end{cases}$

### 4.3 Характеры

Здесь уместно «напомнить» определение и основные свойства групповых характеров и характеров Дирихле (aka числовых характеров). Поскольку про группу  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  мы всё знаем, то мы умеем находить все хД по модулю  $m$ .

**Задача 4.7.** Описать все характеры по модулям  $m = 8, 10, 12, 15, 18$  (найти систему образующих и задать значения на образующих в виде таблицы).

**Задача 4.8.** Описать все характеры  $\chi$  по модулю  $m$ , удовлетворяющие данным условиям:

- 1)  $m = 20$ ,  $\chi(13) = i$ ;  $(\chi(11) = \pm 1, \chi(17) = -i)$
- 2)  $m = 21$ ,  $\chi(2) = e^{2\pi i/3}$ ;  $(\chi(8) = 1, \chi(10) = \pm e^{\pi i/3})$
- 3)  $m = 24$ ,  $\chi(5) = \chi(7) = 1$ ;  $(\chi(7) = 1, \chi(13) = \chi(17) = \pm 1)$
- 4)  $m = 30$ ,  $\chi(17) = i$ ;  $(\chi(11) = \pm 1, \chi(7) = \chi(11)i)$
- 5)  $m = 380$ ,  $\chi(23) = -1$ .  $(\chi(191) = -\chi(77) = \pm 1, \chi(21) = \pm 1)$

**Задача 4.9.** Пусть  $p > 2$  — простое число,  $\chi(x) = \left(\frac{x}{p}\right)$  — символ Лежандра. Доказать, что  $\chi$  — единственный неглавный вещественный характер по модулю  $p$ .

**Задача 4.10.** Найти количество вещественных характеров по модулю  $m$ , если известно каноническое разложение числа  $m$  на простые множители.

**Задача 4.11.** Найти все  $m \in \mathbb{N}$ , для которых все характеры по модулю  $m$  вещественные.

**Задача 4.12.**

- 1) Пусть  $p > 2$  — простое число,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, p) = 1$ . Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{ak+b}{p}\right) = 0.$$

- 2) Пусть  $P \in \mathbb{N}$  нечётно,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, P) = 1$ . Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{P-1} \left(\frac{ak+b}{P}\right) = \begin{cases} \varphi(P), & P \text{ — полный квадрат (то есть } \sqrt{P} \in \mathbb{N}), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Задача 4.13.** Пусть  $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$  ( $2 \leq p_1 < \cdots < p_s$  — простые числа,  $\alpha_i \in \mathbb{N}$ ),  $\chi_1, \dots, \chi_s$  — характеры по модулям  $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_s^{\alpha_s}$  соответственно. Доказать, что функция  $\chi(x) = \chi_1(x) \cdots \chi_s(x)$  является характером по модулю  $m$ , причём для каждого характера по модулю  $m$  существует единственное такое представление.

**Задача 4.14.** Пусть  $\text{ord}_m a = d$ ,  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Доказать, что характер  $\chi$  по модулю  $m$ , удовлетворяющий условию  $\chi(a) = \zeta$ , найдётся тогда и только тогда, когда  $\zeta^d = 1$ , причём в этом случае существует ровно  $\varphi(m)/d$  таких характеров.

**Задача 4.15** (почти лемма Артина). Пусть  $\chi_1, \dots, \chi_n$  — различные характеры Дирихле (по произвольным модулям). Доказать, что функции  $\chi_1, \dots, \chi_n$  линейно независимы над  $\mathbb{C}$ .

## 4.4 L-функции и теорема Дирихле о простых числах

**Задача 4.16.** Пусть  $\chi_0$  — главный характер по модулю  $m$ . Найти вычет функции  $L(s, \chi_0)$  в точке  $s = 1$ .

**Задача 4.17.**

- 1) Пусть  $\sigma > 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\chi$  — произвольный характер по модулю  $m$ ,  $\chi_0$  — главный характер по модулю  $m$ . Доказать неравенство

$$|L^3(\sigma, \chi_0) L^4(\sigma + ti, \chi) L(\sigma + 2ti, \chi^2)| \geq 1.$$

- 2) Доказать, что  $L(s, \chi)$  не имеет нулей на прямой  $\Re s = 1$ . (Неравенство  $L(1, \chi) \neq 0$  считается известным.)

**Задача 4.18** (вычисление  $L(1, \chi)$ ).

- 1) Пусть  $\chi$  — неглавный характер по модулю  $m$ ,  $P(z) = \sum_{k=1}^m \chi(k)z^{k-1}$ . Доказать, что

$$L(1, \chi) = \int_0^1 \frac{P(z) dz}{1 - z^m}.$$

- 2) Пусть  $\chi$  — неглавный характер по модулю 4. Доказать, что  $L(1, \chi) = \pi/4$ .
- 3) Доказать равенства:

$$\text{а) } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}};$$

$$\text{б) } 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

**Задача 4.19.**

- 1) Пусть  $\chi$  — числовой характер. Доказать, что

$$\ln L(s, \chi) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + O(1), \quad \Re s > 1.$$

- 2) Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, m) = 1$ . Доказать, что

$$\sum_{p \equiv a \pmod{m}} \frac{1}{p^s} = -\frac{\ln(s-1)}{\varphi(m)} + O(1), \quad s \rightarrow 1 + 0.$$

**Задача 4.20.** Пусть  $\chi$  — неглавный числовой характер. Доказать утверждения:

- 1) Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n) \ln n}{n}$  сходится. (Указание. Можно воспользоваться задачей 2.5.)
- 2)  $\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n)}{n} = L(1, \chi) + O\left(\frac{1}{x}\right)$ . (Указание. Использовать преобразование Абеля.)
- 3)  $\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \ln n}{n} = L(1, \chi) \sum_{d \leq x} \frac{\chi(d) \Lambda(d)}{d} + O(1)$ . (Указание. Использовать задачу 1.2.)
- 4)  $\sum_{n \leq x} \frac{\chi(n) \Lambda(n)}{n} = O(1)$ .
- 5)  $\sum_{p \leq x} \frac{\chi(p) \ln p}{p} = O(1)$ .

**Задача 4.21.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, m) = 1$ . Используя задачи 1.6 и 4.20, доказать, что:

- 1)  $\sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv a \pmod{m}}} \frac{\ln p}{p} = \frac{\ln x}{\varphi(m)} + O(1)$ ;
- 2)  $\sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv a \pmod{m}}} \frac{1}{p} = \frac{\ln \ln x}{\varphi(m)} + \text{const}(m, a) + O\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ ,  $x \geq 2$ .

**Задача 4.22** (асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях). Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, m) = 1$ . Обозначим

$$\pi(x; m, a) = \sum_{\substack{p \leq x, \\ p \equiv a \pmod{m}}} 1, \quad \psi(x; m, a) = \sum_{\substack{n \leq x, \\ n \equiv a \pmod{m}}} \Lambda(n).$$

Возьмём  $b \in \mathbb{Z}$ , такое что  $ab \equiv 1 \pmod{m}$ , и рассмотрим функцию

$$F(s) = \frac{1}{\varphi(m)} \left( \frac{1}{s} \sum_{\chi \pmod{m}} \chi(b) \left( -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right) - \frac{1}{s-1} \right).$$

- 1) Доказать, что функция  $F(s)$  голоморфна при  $\Re s \geq 1$ , причём при  $\Re s > 1$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} \sum_{n \equiv a \pmod{m}} \frac{\Lambda(n)}{n^s} - \frac{1}{\varphi(m)(s-1)} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{(\psi(x; m, a) - x/\varphi(m)) dx}{x^{s+1}}. \end{aligned}$$

- 2) Используя задачу 3.11, доказать сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\psi(x; m, a) - x/\varphi(m)) dx}{x^2}.$$

- 3) Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x; m, a)}{x/\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\psi(x; m, a)}{x} = \frac{1}{\varphi(m)}.$$

(Замечание. Также можно было воспользоваться задачей 3.13.)

**Задача 4.23.** Пусть  $a \in \mathbb{Z}$  таково, что для любого простого  $p > 2$  символ Лежандра  $\left(\frac{a}{p}\right)$  равен 0 или 1. Доказать, что  $a$  — точный квадрат (то есть  $a = b^2$  для некоторого  $b \in \mathbb{Z}$ ).

## 4.5 Суммы с характерами

Введём обозначение  $e(z) = e^{2\pi iz}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Также для  $m \in \mathbb{N}$  положим  $e_m(z) = e(z/m)$  (в частности,  $e_1(z) = e(z)$ ). Некоторые простые свойства:  $e_m(x+y) = e_m(x)e_m(y)$ ,  $e_m(z+m) = e_m(z)$  (более того,  $e_m(x) = e_m(y) \iff \frac{x-y}{m} \in \mathbb{Z}$ ),  $|e_m(z)| = e^{-2\pi \Im m z/m}$ ,  $\overline{e_m(z)} = e_m(-\bar{z})$ .

**Задача 4.24.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ . Доказать, что

$$\frac{1}{m} \sum_{x=0}^{m-1} e_m(ax) = \delta_m(a) := \begin{cases} 1, & a \equiv 0 \pmod{m}, \\ 0, & a \not\equiv 0 \pmod{m}. \end{cases}$$

Пусть  $p$  — простое число,  $\chi$  — характер по модулю  $p$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ . Суммой Гаусса будем называть сумму

$$\tau_a(\chi) = \sum_{x=0}^{p-1} \chi(x) e_p(ax).$$

Для краткости будем обозначить  $\tau(\chi) = \tau_1(\chi)$ .

**Задача 4.25** (простейшие свойства сумм Гаусса). Доказать, что:

1) если  $p \mid a$ , то

$$\tau_a(\chi) = \begin{cases} p-1, & \chi = \chi_0, \\ 0, & \chi \neq \chi_0; \end{cases}$$

2) если  $p \nmid a$ , то  $\tau_a(\chi_0) = -1$ ;

3) если  $p \nmid a$ , то  $\tau_a(\chi) = \chi^{-1}(a) \tau(\chi)$ .

**Задача 4.26** (модуль суммы Гаусса). Доказать равенства:

1)  $\overline{\tau(\chi)} = \chi(-1) \tau(\chi^{-1})$ .

2) Если  $\chi \neq \chi_0$ , то  $\tau(\chi) \tau(\chi^{-1}) = \chi(-1)p$ . (Указание. Сделать во внутренней сумме в равенстве  $\tau(\chi) \tau(\chi^{-1}) = \sum_{y=1}^{p-1} \sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) \chi^{-1}(y) e_p(x+y)$  замену переменной суммирования:  $x \equiv yz \pmod{p}$ .)

3) Если  $\chi \neq \chi_0$ , то  $|\tau(\chi)| = \sqrt{p}$ .

**Задача 4.27.** Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . Для функции  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , такой что  $f(x+m) = f(x)$  при всех  $x \in \mathbb{Z}$ , её дискретным преобразованием Фурье будем называть функцию  $\hat{f}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , определённую по формуле

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{m} \sum_{x=0}^{m-1} f(x) e_m(-\xi x).$$

Очевидно, что  $\hat{f}(\xi+m) = \hat{f}(\xi)$ .

1) Доказать, что  $f(x) = \sum_{\xi=0}^{m-1} \hat{f}(\xi) e_m(\xi x)$ .

2) Доказать равенство Парсеваля

$$\frac{1}{m} \sum_{x=0}^{m-1} f(x) \overline{g(x)} = \sum_{\xi=0}^{m-1} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)};$$

в частности,

$$\frac{1}{m} \sum_{x=0}^{m-1} |f(x)|^2 = \sum_{\xi=0}^{m-1} |\hat{f}(\xi)|^2.$$

- 3) Пусть  $m = p$  — простое число,  $\chi$  — неглавный характер по модулю  $p$ . Используя равенство Парсеваля, доказать, что  $|\tau(\chi)| = \sqrt{p}$ .

**Задача 4.28** (квадратичные суммы Гаусса). Рассмотрим суммы

$$S(a, m) = \sum_{x=0}^{m-1} e_m(ax^2), \quad m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, (a, m) = 1.$$

- 1) Пусть  $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, (a, m) = d$ . Доказать равенство

$$\sum_{x=0}^{m-1} e_m(ax^2) = dS\left(\frac{a}{d}, \frac{m}{d}\right).$$

- 2) Пусть  $m \in \mathbb{N}, a, b, c \in \mathbb{Z}, (2a, m) = 1$ . Найдём  $d \in \mathbb{Z}$ , такое что  $2ad \equiv b \pmod{m}$ . Доказать равенство

$$\sum_{x=0}^{m-1} e_m(ax^2 + bx + c) = e_m(c - ad^2)S(a, m).$$

- 3) Пусть  $p > 2$  — простое число,  $\chi(x) = \left(\frac{x}{p}\right)$  — символ Лежандра. Доказать равенство  $S(a, p) = \tau_a(\chi)$  и вывести отсюда, что

$$S(a, p) = \left(\frac{a}{p}\right)S(1, p),$$

$$S^2(a, p) = \left(\frac{-1}{p}\right)p = \begin{cases} p, & p \equiv 1 \pmod{4}, \\ -p, & p \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

(Указание. Сравнение  $x^2 \equiv b \pmod{p}$  имеет  $1 + \left(\frac{b}{p}\right)$  решений.)

- 4) Доказать, что

$$|S(a, m)|^2 = \begin{cases} m, & m \equiv 1 \pmod{2}, \\ 2m, & m \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0, & m \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

(Указание. В равенстве  $|S(a, m)|^2 = \sum_{y=0}^{m-1} \sum_{x=0}^{m-1} e_m(a(x^2 - y^2))$  сделать во внутренней сумме замену переменной суммирования  $x \equiv y + z \pmod{m}$ .)

- 5) Пусть  $(m, n) = 1$ . Доказать, что

$$S(a, mn) = S(an, m)S(am, n).$$

(Указание. Если  $x$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $m$ , а  $y$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $n$ , то  $nx + my$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $mn$ .)

- 6) Пусть  $p > 2$  — простое число,  $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2$ . Доказать, что

$$S(a, p^\alpha) = pS(a, p^{\alpha-2}).$$

(Указание. Положить  $x = y + p^{\alpha-1}z$ ,  $0 \leq y \leq p^{\alpha-1} - 1$ ,  $0 \leq z \leq p - 1$ .)

7) Пусть  $m$  нечётно. Доказать, что

$$S(a, m) = \left(\frac{a}{m}\right)S(1, m),$$

$$S^2(a, m) = \left(\frac{-1}{m}\right)m,$$

где  $\left(\frac{\cdot}{m}\right)$  — символ Якоби.

8) Пусть  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \geq 4$ . Доказать, что

$$S(a, 2^\alpha) = 2S(a, 2^{\alpha-2}).$$

(Указание. Положить  $x = y + 2^{\alpha-2}z$ ,  $0 \leq y \leq 2^{\alpha-2} - 1$ ,  $0 \leq z \leq 3$ .)

9) Доказать, что при  $\alpha \geq 2$  выполнено

$$S(a, 2^\alpha) = \left(\frac{2^\alpha}{|a|}\right)(1 + i^a)2^{\alpha/2}.$$

10) Известно, что для любого простого  $p > 2$  выполнено

$$S(1, p) = i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p} = \begin{cases} \sqrt{p}, & p \equiv 1 \pmod{4}, \\ i\sqrt{p}, & p \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

(Доказать это не очень просто; Гаусс потратил на поиски доказательства более четырёх лет. Сравнительно несложное доказательство можно найти, например, в задаче 4.43.) Используя это равенство, доказать, что

$$S(a, m) = \begin{cases} \left(\frac{a}{m}\right) i^{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2} \sqrt{m}, & m \equiv 1 \pmod{2}, \\ \left(\frac{m}{|a|}\right) (1 + i^a) \sqrt{m}, & m \equiv 0 \pmod{4}, \\ 0, & m \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases}$$

Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Под решением сравнения

$$f(x_1, \dots, x_n) \equiv 0 \pmod{m} \tag{4.1}$$

будем понимать набор классов вычетов  $x_\nu \equiv a_\nu \pmod{m}$ ,  $1 \leq \nu \leq n$ , где числа  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  удовлетворяют сравнению  $f(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \pmod{m}$ .

**Задача 4.29.** Доказать, что количество решений сравнения (4.1) равно

$$\frac{1}{m} \sum_{t, x_1, \dots, x_n=0}^{m-1} e_m(tf(x_1, \dots, x_n)) = m^{n-1} + \frac{1}{m} \sum_{t=1}^{m-1} \sum_{x_1, \dots, x_n=0}^{m-1} e_m(tf(x_1, \dots, x_n)).$$

**Задача 4.30.** Пусть  $p > 2$  — простое число,  $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ ,  $d = a_1 \cdots a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Обозначим через  $N$  количество решений сравнения

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 + b \equiv 0 \pmod{p}.$$

Доказать равенства:

1) Если  $n$  чётно, то

$$N = \begin{cases} p^{n-1} + \left(\frac{(-1)^{n/2d}}{p}\right) p^{n/2-1}(p-1), & b \equiv 0 \pmod{p}, \\ p^{n-1} - \left(\frac{(-1)^{n/2d}}{p}\right) p^{n/2-1}, & b \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

2) Если  $n$  нечётно, то

$$N = p^{n-1} + \left(\frac{(-1)^{(n+1)/2bd}}{p}\right) p^{(n-1)/2}.$$

(Указание. Использовать задачи 4.29 и 4.28.)

**Задача 4.31** (внезапно квадратичный закон взаимности). Вывести из задачи 4.30 квадратичный закон взаимности для символа Лежандра вместе с двумя его дополнениями:

1) Пусть  $p > 2$  — простое число. Рассматривая сравнение  $x_1^2 + x_2^2 - 2 \equiv 0 \pmod{p}$ , доказать, что

$$p - \left(\frac{-1}{p}\right) \equiv 6 + 2\left(\frac{2}{p}\right) \pmod{8}.$$

Вывести отсюда формулы для  $\left(\frac{-1}{p}\right)$  и  $\left(\frac{2}{p}\right)$ . (Указание. Почти все решения сравнения разбиваются на восьмёрки вида  $(\pm c_1, \pm c_2), (\pm c_2, \pm c_1)$ .)

2) Пусть  $p, q$  — различные нечётные простые числа. Рассматривая сравнение

$$x_1^2 + \dots + x_q^2 - q \equiv 0 \pmod{p},$$

доказать квадратичный закон взаимности. (Указание. Разбить решения на группы вида  $(c_1, c_2, \dots, c_q), (c_2, c_3, \dots, c_1), \dots, (c_q, c_1, \dots, c_{q-1})$ .)

**Задача 4.32.** Пусть  $p$  — простое число,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $d = (r, p-1)$ . Рассмотрим суммы

$$S_r(a, p) = \sum_{x=0}^{p-1} e_p(ax^r), \quad a \in \mathbb{Z}.$$

1) Пусть  $\chi$  — характер по модулю  $p$  порядка  $d$  (эквивалентно:  $\chi(g) = e_d(1)$  для некоторого первообразного корня  $g$  по модулю  $p$ ). Доказать, что сравнение  $x^r \equiv b \pmod{p}$  при  $p \nmid b$  имеет  $\sum_{k=0}^{d-1} \chi^k(b)$  решений. (Указание. Группа  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  циклическая.)

2) Пусть  $p \nmid a$ . Доказать равенства

$$S_r(a, p) = S_d(a, p) = \sum_{k=1}^{d-1} \tau_a(\chi^k).$$

3) Пусть  $p \nmid a$ . Доказать неравенство

$$|S_r(a, p)| \leq (d-1)\sqrt{p}.$$

4) Доказать, что для любых  $p, r$  найдётся  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ , такое что

$$|S_r(a, p)| \geq \sqrt{(d-1)p}.$$

(Указание. Рассмотреть  $\sum_{a=0}^{p-1} |S_r(a, p)|^2$ .)

**Задача 4.33.** Пусть  $p$  — простое число,  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$ ,  $p \nmid a_1 \cdots a_n$ . Обозначим через  $N$  количество решений сравнения

$$a_1 x_1^{r_1} + \cdots + a_n x_n^{r_n} + b \equiv 0 \pmod{p}.$$

Также положим  $d_\nu = (r_\nu, p-1)$ ,  $1 \leq \nu \leq n$ . Доказать неравенства:

- 1)  $|N - p^{n-1}| \leq (d_1 - 1) \cdots (d_n - 1)(p-1)p^{n/2-1}$ ;
- 2) если  $p \nmid b$ , то  $|N - p^{n-1}| \leq (d_1 - 1) \cdots (d_n - 1)p^{(n-1)/2}$ .

**Задача 4.34.** Пусть  $p > 2$  — простое число. Доказать утверждения:

- 1) Если  $a \in \mathbb{Z}$ , то

$$\sum_{x=0}^{p-1} \left( \frac{x^2 + a}{p} \right) = p\delta_p(a) - 1 = \begin{cases} p-1, & a \equiv 0 \pmod{p}, \\ -1, & a \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

(Указание. Рассмотреть количество решений сравнения  $y^2 \equiv x^2 + a \pmod{p}$ .)

- 2) Если  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $p \nmid a$ , то

$$\sum_{x=0}^{p-1} \left( \frac{ax^2 + bx + c}{p} \right) = \left( \frac{a}{p} \right) (p\delta_p(b^2 - 4ac) - 1).$$

- 3) Если  $a, b \in \mathbb{Z}$ , то

$$\sum_{x=0}^{p-1} \left( \frac{(x+a)(x+b)}{p} \right) = p\delta_p(a-b) - 1.$$

**Задача 4.35.** Пусть  $p > 2$  — простое число,  $c \in \mathbb{Z}$ ,  $p \nmid c$ . Для  $\alpha, \beta \in \{1, -1\}$  обозначим через  $N(\alpha, \beta)$  количество  $x \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ , таких что  $\left(\frac{x}{p}\right) = \alpha$ ,  $\left(\frac{x+c}{p}\right) = \beta$ . Доказать, что

$$N(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \left( p-2 - \alpha \left( \frac{-c}{p} \right) - \beta \left( \frac{c}{p} \right) - \alpha\beta \right).$$

(Указание.  $N(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \sum_{x \neq 0, -c} \left( 1 + \alpha \left( \frac{x}{p} \right) \right) \left( 1 + \beta \left( \frac{x+c}{p} \right) \right)$ .)

**Задача 4.36.**

- 1) Пусть  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ . Доказать, что

$$\left| \sum_{x=a}^{a+N-1} e(\alpha x + \beta) \right| \leq \min \left\{ N, \frac{1}{|\sin(\pi\alpha)|} \right\} \leq \min \left\{ N, \frac{1}{2\|\alpha\|} \right\},$$

где  $\|\alpha\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |\alpha - n|$ .

- 2) Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 1$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, m) = 1$ . Доказать неравенство

$$\sum_{x=1}^{m-1} \frac{1}{\left\| \frac{ax}{m} \right\|} < 2m \ln m.$$

(Указание.  $1/x < \ln(x+1/2) - \ln(x-1/2)$  при  $x > 1/2$ .)

- 3) Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 1$ ,  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ , причём  $f(x+m) = f(x)$  при всех  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, m) = 1$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Доказать неравенство

$$\left| \sum_{x=0}^{N-1} f(ax+b) - \frac{N}{m} \sum_{x=0}^{m-1} f(x) \right| \leq \max_{1 \leq \xi \leq m-1} \left| \sum_{x=0}^{m-1} f(x) e_m(\xi x) \right| \cdot \ln m.$$

(Указание. Использовать п. 1 задачи 4.27.)

**Задача 4.37** (неравенство Пойа–Виноградова). Пусть  $\chi$  — неглавный характер по модулю  $m$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $(a, m) = 1$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Доказать, что

$$\left| \sum_{x=0}^{N-1} \chi(ax+b) \right| < \sqrt{m} \ln m.$$

(Указание. См. задачу 4.36.)

**Задача 4.38.** Пусть  $p > 2$  — простое число,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \leq p$ . Доказать, что количество квадратичных (не)вычетов по модулю  $p$  среди чисел  $a, a+1, \dots, a+N-1$  равно  $\frac{1}{2}N + O(\sqrt{p} \ln p)$ . (Указание. Применить неравенство Пойа–Виноградова для символа Лежандра.)

**Задача 4.39** (оценки для наименьшего квадратичного невычета). Пусть  $p > 2$  — простое число,  $n = n(p)$  — наименьший положительный квадратичный невычет по модулю  $p$ . Доказать утверждения:

- 1)  $n = O(\sqrt{p} \ln p)$ .
- 2)  $n < 1/2 + \sqrt{p+1/4}$ . (Указание. Рассмотрев произведение  $n[p/n]$ , доказать, что  $[p/n]$  — квадратичный невычет, откуда следует  $n \leq [p/n]$ . Здесь  $[x]$  — наименьшее целое  $\geq x$ .)
- 3) Каждый положительный квадратичный невычет по модулю  $p$  имеет простой делитель  $\geq n$ .
- 4) Используя п. 3 и задачи 1.12, 4.38, доказать оценку  $n = O\left(p^{\frac{1}{2\sqrt{e}}} (\ln p)^{\frac{2}{\sqrt{e}}}\right)$ . (Указание. Допустим, что  $n > p^{0.1}$ . Положим  $N = \lfloor \sqrt{p} \ln^2 p \rfloor$ . Тогда

$$\frac{1}{2}N + O(\sqrt{p} \ln p) \leq \sum_{n \leq q \leq N} \frac{N}{q} = N \left( \ln \frac{\ln N}{\ln n} + O\left(\frac{1}{\ln p}\right) \right),$$

где  $q$  пробегает простые числа, откуда  $n = O(N^{1/\sqrt{e}})$ .)

**Задача 4.40** (суммы Якобсталя). Пусть  $p > 2$  — простое число. Обозначим

$$S(a) = \sum_{x=0}^{p-1} \left( \frac{x(x^2+a)}{p} \right), \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Доказать утверждения:

- 1) Если  $p \equiv -1 \pmod{4}$ , то  $S(a) = 0$  для любого  $a \in \mathbb{Z}$ .
- 2)  $\frac{1}{2}S(a) \in \mathbb{Z}$  для любого  $a \in \mathbb{Z}$ .
- 3)  $S(ab^2) = \left(\frac{b}{p}\right)S(a)$  для любых  $a, b \in \mathbb{Z}$ .

- 4)  $\sum_{a=0}^{p-1} S^2(a) = \begin{cases} 2p(p-1), & p \equiv 1 \pmod{4}, \\ 0, & p \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$  (Указание. См. задачу 4.34.)
- 5) Если  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ ,  $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$ , то  $p = \left(\frac{1}{2}S(a)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}S(b)\right)^2$ .
- 6) Если  $d \in \mathbb{N}$ ,  $(p-1) \nmid d$ , то  $\sum_{x=0}^{p-1} x^d \equiv 0 \pmod{p}$ . (Указание. Группа  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  циклическая.)
- 7) Если  $p = 4n + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то  $S(1) \equiv -\binom{2n}{n} \pmod{p}$ . (Указание. Использовать критерий Эйлера для символа Лежандра.)

**Задача 4.41** (суммы Якоби). Пусть  $p$  — простое число,  $\chi_1, \chi_2$  — характеры по модулю  $p$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ . Обозначим

$$J_a(\chi_1, \chi_2) = \sum_{x=0}^{p-1} \chi_1(x)\chi_2(a-x).$$

Для краткости положим  $J(\chi_1, \chi_2) = J_1(\chi_1, \chi_2)$ . Доказать равенства:

- 1)  $J_a(\chi_1, \chi_2) = J_a(\chi_2, \chi_1)$ .
- 2) Если  $p \mid a$ , то

$$J_a(\chi_1, \chi_2) = \begin{cases} (p-1)\chi_2(-1), & \chi_1\chi_2 = \chi_0, \\ 0, & \chi_1\chi_2 \neq \chi_0. \end{cases}$$

- 3) Если  $p \nmid a$ , то  $J_a(\chi_1, \chi_2) = \chi_1(a)\chi_2(a)J(\chi_1, \chi_2)$ .

$$4) J(\chi, \chi_0) = \begin{cases} p-2, & \chi = \chi_0, \\ -1, & \chi \neq \chi_0. \end{cases}$$

- 5) Если  $\chi \neq \chi_0$ , то  $J(\chi, \chi^{-1}) = -\chi(-1)$ . (Указание. Сделать замену переменной суммирования  $y \equiv x(1-x)^{-1} \pmod{p}$ .)
- 6) Если  $\chi_1\chi_2 \neq \chi_0$ , то

$$J(\chi_1, \chi_2) = \frac{\tau(\chi_1)\tau(\chi_2)}{\tau(\chi_1\chi_2)}.$$

- 7) Если характеры  $\chi_1, \chi_2, \chi_1\chi_2$  неглавные, то  $|J(\chi_1, \chi_2)| = \sqrt{p}$ .

**Задача 4.42.**

- 1) Пусть  $p > 2$  — простое число,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $\chi$  — характер по модулю  $p$ ,  $\chi^2 \neq \chi_0$ ,  $\chi_1(x) = \left(\frac{x}{p}\right)$  — символ Лежандра. Доказать, что

$$\sum_{x=0}^{p-1} \chi(x^2 + a) = \chi(a)\chi_1(-a) \frac{\tau(\chi)\tau(\chi_1)}{\tau(\chi\chi_1)}.$$

- 2) Пусть  $p$  — простое число,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\chi$  — характер по модулю  $p$ , такой что  $\chi(g) = i$ , где  $g$  — некоторый п. к. по модулю  $p$ . Определим  $a, b \in \mathbb{Z}$  с помощью равенства

$$\sum_{x=0}^{p-1} \chi(x^2 + 1) = a + bi.$$

Доказать, что  $p = a^2 + b^2$ .

**Задача 4.43** (вычисление квадратичной суммы Гаусса). Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $S = \sum_{x=0}^{m-1} e_m(x^2)$ ,  $f(z) = \frac{e_m(z^2)}{e(z)-1}$ . Доказать равенства:

1)  $S = \int_{L_{m-1/2}} f(z) dz - \int_{L_{-1/2}} f(z) dz$ , где  $L_\alpha$  — прямая  $y = x - \alpha$ , пробегаемая снизу вверх.

(Указание. Применить теорему Коши о вычетах к параллелограмму с вершинами в точках  $-1/2 \pm Ne^{\pi i/4}$ ,  $m - 1/2 \pm Ne^{\pi i/4}$  и перейти к пределу при  $N \rightarrow +\infty$ .)

2)  $S = \int_{L_{-1/2}} e_m(z^2)(e(z) + 1) dz$ . (Указание.  $f(z + m) = e(2z)f(z)$ .)

3)  $S = (1 + i^{-m}) \int_{L_0} e_m(z^2) dz = \frac{1 + i^{-m}}{1 + i^{-1}} \sqrt{\frac{m}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ . (Указание. Интеграл  $\int_{L_\alpha} e_m(z^2) dz$  не зависит от  $\alpha$ .)

4) Вывести из п. 3 формулы для гауссова интеграла (интеграла Эйлера–Пуассона)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

и для (квадратичной) суммы Гаусса

$$\sum_{x=0}^{m-1} e_m(x^2) = \frac{1 + i^{-m}}{1 + i^{-1}} \sqrt{m} = \begin{cases} (1 + i)\sqrt{m}, & m \equiv 0 \pmod{4}, \\ \sqrt{m}, & m \equiv 1 \pmod{4}, \\ 0, & m \equiv 2 \pmod{4}, \\ i\sqrt{m}, & m \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

## Глава 5

# Диофантовы приближения и геометрия чисел

### 5.1 Диофантовы приближения

Далее через  $\|x\|$  обозначено расстояние от числа  $x \in \mathbb{R}$  до ближайшего целого числа, т. е.  $\|x\| = \min_{a \in \mathbb{Z}} |x - a| = \min\{\{x\}, 1 - \{x\}\}$ . Очевидные свойства:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,  $\|nx\| \leq n\|x\|$  при  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|x + 1\| = \|-x\| = \|x\|$ ,  $\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$ .

**Задача 5.1** (теорема Дирихле). Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Доказать утверждения:

- 1) Для любого  $t \in \mathbb{N}$  найдётся  $q \in \mathbb{N}$ , такое что

$$\|\alpha q\| \leq \frac{1}{t+1}, \quad q \leq t.$$

(Указание. Рассмотреть дробные доли  $\{\alpha x\} \in [0, 1)$  для  $x = 0, 1, \dots, t$ ; разбить промежуток  $[0, 1)$  на промежутки вида  $\left[\frac{\tau}{t+1}, \frac{\tau+1}{t+1}\right)$  и разобрать два случая: когда в самом правом промежутке  $\left[\frac{t}{t+1}, 1\right)$  что-то есть, и когда нет.)

- 2) Для любого  $\tau \in [1, +\infty)$  найдётся  $q \in \mathbb{N}$ , такое что

$$\|\alpha q\| < \frac{1}{\tau}, \quad q \leq \tau.$$

- 3) Для любого  $\tau \in [1, +\infty)$  найдётся несократимая рациональная дробь  $\frac{a}{q}$ , такая что

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{\tau q}, \quad q \leq \tau.$$

**Задача 5.2** (принцип Дирихле). Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ,  $Q \in \mathbb{N}$ . Доказать утверждения:

- 1) Существует  $q \in \mathbb{N}$ , такое что

$$\max_{1 \leq j \leq n} \|\alpha_j q\| < Q^{-1}, \quad q \leq Q^n.$$

- 2) Пусть хотя бы одно из чисел  $\alpha_j$  иррационально. Тогда существует бесконечно много наборов рациональных чисел  $\left(\frac{a_1}{q}, \dots, \frac{a_n}{q}\right)$ , удовлетворяющих неравенству

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left| \alpha_j - \frac{a_j}{q} \right| < q^{-1-1/n}.$$

- 3) Существуют целые числа  $q_1, \dots, q_n$ , такие что

$$\| \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n \| < Q^{-n}, \quad 0 < \max_{1 \leq j \leq n} |q_j| \leq Q.$$

- 4) Пусть числа  $1, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ . Тогда существует бесконечно много примитивных векторов  $(a, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ , удовлетворяющих неравенству

$$|a + \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n| < \left( \max_{1 \leq j \leq n} |q_j| \right)^{-n}.$$

**Задача 5.3** (лемма Бlichфельда). Пусть измеримое (по Лебегу) множество  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  имеет меру больше 1. Доказать, что существуют две различные точки  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ , такие что  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ .

**Задача 5.4** (первая теорема Минковского о выпуклом теле).

- 1) Пусть  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  — ограниченное выпуклое множество, (центрально) симметричное относительно начала координат. Допустим, что мера Жордана<sup>1</sup>  $\text{vol } \Omega$  множества  $\Omega$  больше  $2^d$ . Доказать, что  $\Omega \cap (\mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}) \neq \emptyset$ . (Указание. Применить лемму Бlichфельда для  $A = \frac{1}{2} \Omega$ .)
- 2) Доказать, что теорема Минковского справедлива и при  $\text{vol } \Omega = 2^d$ , если дополнительно предположить, что  $\Omega$  замкнуто.

**Задача 5.5** (теорема Минковского о линейных формах).

- 1) Рассмотрим линейные формы

$$L_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^d \alpha_{\mu,\nu} x_\nu, \quad 1 \leq \mu \leq d,$$

с вещественными коэффициентами  $\alpha_{\mu,\nu}$  и определителем  $\Delta = \det(\alpha_{\mu,\nu})$ . Пусть положительные числа  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d$  удовлетворяют неравенству  $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_d \geq |\Delta|$ . Доказать, что система неравенств

$$\begin{aligned} |L_1(\mathbf{x})| &\leq \varepsilon_1, \\ |L_\mu(\mathbf{x})| &< \varepsilon_\mu, \quad 1 < \mu \leq d, \end{aligned}$$

имеет решение  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ .

- 2) Доказать, что утверждения пунктов 1 и 3 задачи 5.2 справедливы для произвольного  $Q \in [1, +\infty)$ .

<sup>1</sup>Можно доказать, что произвольное ограниченное выпуклое множество в  $\mathbb{R}^d$  измеримо по Жордану.

3) Рассмотрим линейные формы

$$L_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\mu,\nu} x_\nu, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

с вещественными коэффициентами  $\alpha_{\mu,\nu}$ . Доказать, что для любого  $X \in [1, +\infty)$  найдётся вектор  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ , такой что

$$\max_{1 \leq \mu \leq m} \|L_\mu(\mathbf{x})\| < X^{-n/m}, \quad \max_{1 \leq \nu \leq n} |x_\nu| \leq X.$$

4) *Комплексный случай* (сохраняем обозначения пункта 1). Пусть положительные числа  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{d_1+d_2}$  удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{d_1} \varepsilon_{d_1+1}^2 \cdots \varepsilon_{d_1+d_2}^2 \geq \left(\frac{4}{\pi}\right)^{d_2} |\Delta|,$$

$d = d_1 + 2d_2$ . Доказать, что система неравенств

$$\begin{aligned} |L_\mu(\mathbf{x})| &\leq \varepsilon_\mu, & 1 \leq \mu \leq d_1, \\ |L_\mu(\mathbf{x}) + iL_{\mu+d_2}(\mathbf{x})| &\leq \varepsilon_\mu, & d_1 < \mu \leq d_1 + d_2, \end{aligned}$$

имеет решение  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ , причём все неравенства, кроме одного (любого), можно заменить на строгие.

**Задача 5.6** (уточнение п. 2 задачи 5.2). Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ . Доказать утверждения:

1) Для любых  $M, t > 0$  множество

$$\Omega(M, t) = \left\{ (x, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t^{-n}|x| + nt \max_{1 \leq j \leq n} |y_j - \alpha_j x| \leq M \right\}$$

компактно, выпукло, симметрично относительно начала координат и имеет меру Жордана  $\frac{(2M)^{n+1}}{(n+1)n^n}$ . (Указание. С помощью линейного преобразования свести к случаю  $\alpha_j = 0, t = 1$ .)

2) Если  $(x, y_1, \dots, y_n) \in \Omega(M, t)$ ,  $t^{-n}|x| \neq t \max_{1 \leq j \leq n} |y_j - \alpha_j x|$ , то

$$|x| \left( \max_{1 \leq j \leq n} |y_j - \alpha_j x| \right)^n < \left( \frac{M}{n+1} \right)^{n+1}.$$

3) Существует бесконечно много  $q \in \mathbb{N}$ , таких что

$$q^{1/n} \max_{1 \leq j \leq n} \|\alpha_j q\| < \frac{n}{n+1}.$$

4) Существует бесконечно много  $q \in \mathbb{N}$ , таких что

$$q \prod_{j=1}^n \|\alpha_j q\| < \frac{n!}{(n+1)^n}.$$

**Задача 5.7** (вокруг одномерной теоремы Кронекера).

1) Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Доказать, что множество дробных долей  $\{\alpha n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , плотно в  $[0, 1]$  тогда и только тогда, когда  $\alpha$  иррационально.

- 2) Найти все предельные точки последовательностей  $\cos n$ ,  $\sin n$ ,  $e^{ni}$ .
- 3) Пусть  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Доказать, что найдётся бесконечно много  $n \in \mathbb{N}$ , таких что

$$\|\alpha n + \beta\| < \frac{C}{n},$$

где  $C > 0$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $\alpha, \beta$ . (Указание. Взять несократимую дробь  $\frac{a}{q}$ , такую что  $|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{1}{q^2}$ ; найти  $b \in \mathbb{Z}$ , такое что  $|\beta - \frac{b}{q}| < \frac{1}{q}$ ; наконец, подобрать  $n$ , такое что  $an + b \equiv 0 \pmod{q}$ ,  $q \leq n < 2q$ .)

- 4) Найти все предельные точки последовательностей  $(\cos n)^n$ ,  $(\sin n)^n$ . (Ответ:  $[-1, 1]$  оба раза. Указание. Для косинуса брать  $n$  вида  $n = (2k + 1)m$ , где  $k$  таково, что  $|(2k + 1) - (\pi + 2\pi l)| = O(1/k)$ ,  $m = m(k)$ . Для синуса аналогично.)

## 5.2 Решётки

Пусть векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^d$  линейно независимы над  $\mathbb{R}$ . Множество

$$\Lambda = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \dots + \mathbb{Z}\mathbf{e}_n = \{a_1\mathbf{e}_1 + \dots + a_n\mathbf{e}_n \mid a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}$$

называется ( $n$ -мерной) решёткой в  $\mathbb{R}^d$ , а (упорядоченный) набор  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  — базисом решётки  $\Lambda$ . Если  $n = d$ , то решётка  $\Lambda$  называется полной, в противном случае — неполной.

**Задача 5.8.** Пусть  $\Lambda$  — решётка с базисом  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ . Рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \sum_{i=1}^n c_{i,j} \mathbf{e}_i \in \Lambda, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Доказать, что набор  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$  является базисом решётки  $\Lambda$  тогда и только тогда, когда матрица  $C = (c_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  унимодулярна (т. е.  $C \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ , т. е.  $\det C = \pm 1$ ).

Пусть  $\Lambda$  — решётка с базисом  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ . Определителем  $\det(\Lambda)$  решётки  $\Lambda$  называется  $n$ -мерный объём параллелепипеда, натянутого на векторы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , т. е. если рассмотреть матрицу

$$E = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} e_{1,1} & \dots & e_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{d,1} & \dots & e_{d,n} \end{pmatrix},$$

то

$$\det(\Lambda) = \sqrt{\det(\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle)_{i,j=1}^n} = \sqrt{\det(E^T E)}.$$

Если решётка  $\Lambda$  полная, то  $\det(\Lambda) = |\det E|$ .

**Задача 5.9.** Доказать, что это определение корректно (т. е. определитель решётки не зависит от выбора базиса).

**Задача 5.10** (снова теорема Минковского о выпуклом теле). Пусть  $\Lambda$  — полная решётка в  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  — ограниченное выпуклое множество, симметричное относительно начала координат, объём которого больше  $2^d \det(\Lambda)$ . Доказать, что  $\Omega \cap (\Lambda \setminus \{\mathbf{0}\}) \neq \emptyset$ .

**Задача 5.11** (теорема Ферма–Эйлера о двух квадратах).

- 1) Доказать, что для любых  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  множество

$$\Lambda(m, a) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2 \mid x \equiv ay \pmod{m} \right\}$$

является полной решёткой в  $\mathbb{R}^2$  с определителем  $m$ , причём круг  $x^2 + y^2 < 2m$  содержит ненулевую точку решётки  $\Lambda(m, a)$ .

- 2) Пусть  $m \in \mathbb{N}$  таково, что сравнение  $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$  разрешимо. Доказать, что уравнение  $x^2 + y^2 = m$  разрешимо в целых числах  $x, y$ . (Указание. Рассмотреть  $\Lambda(m, a)$ , где  $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$ .)
- 3) Доказать, что сравнение  $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$  разрешимо тогда и только тогда, когда  $m$  не делится на 4 и не делится ни на какое простое  $p \equiv -1 \pmod{4}$ .
- 4) Доказать, что число  $n \in \mathbb{N}$  можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда для всякого простого  $p \equiv -1 \pmod{4}$  число  $v_p(n)$  чётно.

**Задача 5.12** (теорема Лагранжа о четырёх квадратах).

- 1) Доказать, что для любого простого  $p$  сравнение  $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  разрешимо. (Указание. Переписать сравнение в виде  $x^2 \equiv -y^2 - 1$ .)
- 2) Доказать, что сравнение  $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{m}$  разрешимо тогда и только тогда, когда  $m \not\equiv 0 \pmod{4}$ .
- 3) Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Доказать, что в (4-мерном) шаре  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < 2m$  найдётся ненулевое решение системы сравнений

$$\begin{cases} x_3 \equiv ax_1 - bx_2 \pmod{m}, \\ x_4 \equiv bx_1 + ax_2 \pmod{m}. \end{cases}$$

- 4) Доказать, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  уравнение  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = n$  разрешимо в целых числах  $x_1, x_2, x_3, x_4$ .

Подрешёткой решётки  $\Lambda$  называется подмножество  $\Gamma \subseteq \Lambda$ , которое само является решёткой.

**Задача 5.13.** Пусть  $\Lambda$  — решётка,  $\Gamma \subseteq \Lambda$ . Доказать, что  $\Gamma$  является подрешёткой тогда и только тогда, когда  $\Gamma$  — (под)группа по сложению. (Указание. Свести к случаю  $\Lambda = \mathbb{Z}^n$  и воспользоваться тем, что подгруппа конечно порождённой абелевой группы тоже является конечно порождённой.)

**Задача 5.14.** Пусть  $\Gamma \subseteq \Lambda$  —  $n$ -мерные решётки.

- 1) Доказать, что можно найти базисы  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$  решёток  $\Lambda$  и  $\Gamma$  соответственно, такие что  $\boldsymbol{\varepsilon}_j = d_j \mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где  $d_j$  — некоторые натуральные числа (причём можно

сделать так, что  $d_j \mid d_{j+1}$  при  $j = 1, \dots, n-1$ ; тогда числа  $d_j$  определены однозначно). При этом индекс  $[\Lambda : \Gamma]$  подгруппы  $\Gamma$  в группе  $\Lambda$  конечен и равен

$$[\Lambda : \Gamma] = d_1 \cdots d_n = \frac{\det(\Gamma)}{\det(\Lambda)}.$$

(Замечание-указание. Если  $C$  — матрица перехода от  $\mathbf{e}_j$  к  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ , то замена базисов сводится к преобразованиям над строками и столбцами матрицы  $C$ . Очевидно, что такими преобразованиями можно привести матрицу к диагональному виду. В случае  $d_j \mid d_{j+1}$  получается *нормальная форма Смита* матрицы  $C$ .)

- 2) Пусть  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  — базис  $\Lambda$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$  — базис  $\Gamma$ ,  $C = (c_{i,j})$  — матрица перехода от  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  к  $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ , т. е.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \sum_{i=1}^n c_{i,j} \mathbf{e}_i, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Доказать, что  $[\Lambda : \Gamma] = |\det C|$ .

### Задача 5.15.

- 1) Доказать, что множество  $\Lambda$  всех решений  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  однородной системы линейных сравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \equiv 0 \pmod{d_i}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (5.1)$$

является полной решёткой в  $\mathbb{R}^n$  с определителем  $\det(\Lambda) \leq d_1 \cdots d_m$ . (Указание. Рассмотреть  $\Lambda$  как подрешётку  $\mathbb{Z}^n$  и оценить её индекс.)

- 2) Доказать, что система сравнений (5.1) имеет решение  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , такое что

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq (d_1 \cdots d_m)^{1/n}.$$

**Задача 5.16.** Пусть  $\Lambda$  — подгруппа  $\mathbb{R}^d$  по сложению. Доказать, что  $\Lambda$  — решётка тогда и только тогда, когда  $\Lambda$  — дискретное подмножество  $\mathbb{R}^d$  (т. е. каждая точка  $\Lambda$  является изолированной).

## 5.3 Ряды Фарея

В этом параграфе  $p$  — целое число (необязательно простое).

Для двух рациональных дробей  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  их *медиантой* называется дробь  $\frac{a+c}{b+d}$ . (Здесь дробь  $\frac{p}{q}$  нужно понимать не как вещественное число, а как пару чисел  $p, q$ , чтобы определение было корректно.)

**Задача 5.17.** Доказать следующие свойства медианты:

- 1) если  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , то  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ;
- 2) если  $\left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| = \frac{1}{bd}$ , то  $\left| \frac{a}{b} - \frac{a+c}{b+d} \right| = \frac{1}{b(b+d)}$  и  $\left| \frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} \right| = \frac{1}{(b+d)d}$ .

**Задача 5.18** (ряды Фарея). Определим конечные последовательности  $F_n$  рациональных дробей, упорядоченных в порядке возрастания. Положим  $F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$ . Если  $F_n$  уже построено, то  $F_{n+1}$  получается из  $F_n$  следующим образом: для каждой пары  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  соседних дробей в  $F_n$ , таких что  $b + d = n + 1$ , добавим между ними их медианту  $\frac{a+c}{b+d}$ . (Получаем:  $F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$ ,  $F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$ ,  $F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$  и т. д.) Доказать следующие свойства  $F_n$ :

- 1) Если  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  — соседние дроби в  $F_n$ , то  $\left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| = \frac{1}{bd}$ .
- 2) Все дроби в  $F_n$  несократимы.
- 3) Если  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  — соседние дроби в  $F_n$ , то  $b + d > n$ .
- 4) Если  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  — соседние дроби в  $F_n$ ,  $\frac{k}{n+1} \in \left( \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $a + c = k$ ,  $b + d = n + 1$ .
- 5)  $F_n$  состоит из всех несократимых дробей из отрезка  $[0, 1]$ , знаменатели которых не превосходят  $n$ .
- 6) Если  $\frac{a}{b} < \frac{u}{v} < \frac{c}{d}$  — три последовательные дроби в  $F_n$ , то  $\frac{u}{v} = \frac{a+c}{b+d}$ . (Замечание. Здесь не утверждается, что  $u = a + c$ ,  $v = b + d$ .)

**Задача 5.19** (снова теорема Дирихле). Пусть  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  — соседние дроби в  $F_n$ ,  $\alpha \in \left[ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right]$ . Доказать, что хотя бы одна из дробей  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  даёт решение неравенства

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{(n+1)q}.$$

Вывести отсюда теорему Дирихле о приближениях (см. задачу 5.1).

**Задача 5.20.** Пусть  $\alpha \in \left[ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right]$ , где  $\left| \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \right| = \frac{1}{bd}$ . Доказать, что:

- 1) хотя бы одна из двух дробей  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$  даёт решение неравенства

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2},$$

за исключением случая  $b = d = 1$ ,  $\alpha = a + \frac{1}{2}$ ;

- 2) хотя бы одна из трёх дробей  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}$  даёт решение неравенства

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

**Задача 5.21** (теорема Гурвица).

- 1) Доказать, что для любого  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  существует бесконечно много рациональных чисел  $\frac{p}{q}$ , удовлетворяющих неравенству

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

2) Пусть  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Доказать, что для любого  $\varepsilon > 0$  неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{5} q^2}$$

имеет конечное число решений в числах  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . (Указание. Воспользоваться тем, что  $q^2 \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \cdot \left| \alpha - \frac{p}{q} - \sqrt{5} \right| \in \mathbb{N}$ .)

## Глава 6

# Цепные дроби (TODO)

To be written (маловероятно).

## Глава 7

# Алгебраические числа

### 7.1 Неприводимые многочлены

Все рассматриваемые многочлены имеют рациональные коэффициенты. Под неприводимостью понимается неприводимость над  $\mathbb{Q}$ . Многочлены с целыми коэффициентами будем называть *целочисленными*, а многочлены со старшим коэффициентом 1 — *унитарными*.

**Задача 7.1.** Доказать неприводимость многочленов  $z^4 + 1$ ,  $z^n \pm 2$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Задача 7.2** (неприводимость многочленов маленькой степени).

- 1) Доказать, что многочлен степени 2 или 3 приводим тогда и только тогда, когда у него есть рациональный корень.
- 2) Пусть  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[z]$ ,  $a_0 a_n \neq 0$ . Доказать, что любой рациональный корень многочлена  $P$  имеет вид  $a/b$ , где  $a \mid a_0$ ,  $b \mid a_n$ .
- 3) Проверить неприводимость многочленов  $z^3 \pm z \pm 1$ ,  $2z^3 + 3z^2 + 1$ ,  $3z^3 + 2z^2 + z + 6$ .

**Задача 7.3.** Пусть  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ,  $ac \neq 0$ . Доказать, что многочлены  $P(z)$  и  $cP(az + b)$  одновременно являются или не являются неприводимыми.

**Задача 7.4** (лемма Гаусса).

- 1) *Содержанием* целочисленного многочлена называется НОД его коэффициентов (содержание нулевого многочлена равно 0); обозначение:  $\text{cont}(P)$ . Доказать, что для любых целочисленных многочленов  $P, Q$  (от любого числа переменных) выполнено

$$\text{cont}(PQ) = \text{cont}(P) \text{cont}(Q).$$

(Указание. Кольцо многочленов над полем  $\mathbb{F}_p$  не имеет делителей нуля.)

- 2) Пусть  $P(z), Q(z) \in \mathbb{Q}[z]$ ,  $P(z)Q(z) \in \mathbb{Z}[z]$ . Доказать, что найдётся  $c \in \mathbb{Q}^*$ , такое что многочлены  $cP(z), c^{-1}Q(z)$  целочисленные (аналогично для любого числа переменных).
- 3) Пусть  $P(z), Q(z) \in \mathbb{Q}[z]$  — унитарные многочлены,  $P(z)Q(z) \in \mathbb{Z}[z]$ . Доказать, что многочлены  $P(z), Q(z)$  целочисленные.

**Задача 7.5** (I. Schur). Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — различные целые числа ( $n \in \mathbb{N}$ ). Доказать, что:

- 1) многочлен  $(z + a_1) \cdots (z + a_n) - 1$  неприводим;

2) многочлен  $(z + a_1) \cdots (z + a_n) + 1$  неприводим, за исключением случаев

$$(z + a)(z + a + 2) + 1 = (z + a + 1)^2,$$

$$(z + a)(z + a + 1)(z + a + 2)(z + a + 3) + 1 = ((z + a)(z + a + 3) + 1)^2.$$

**Задача 7.6** («критерий» Эйзенштейна). Пусть  $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[z]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p$  — простое число,  $p \nmid a_n$ ,  $p \mid a_k$  при  $0 \leq k < n$ ,  $p^2 \nmid a_0$ . Доказать, что многочлен  $P(z)$  неприводим. (Указание. Кольцо многочленов  $\mathbb{F}_p[z]$  факториально.)

**Задача 7.7.** Доказать, что многочлен  $z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1$  неприводим тогда и только тогда, когда  $n$  — простое число. (Указание. Для доказательства неприводимости применить Эйзенштейна к многочлену  $P(z + 1)$ .)

**Задача 7.8.** Доказать неприводимость многочленов  $z^4 + 2z^3 + 6z^2 + 3z + 15$ ,  $z^5 + z^2 + 1$ . (Указание. Проверить неприводимость над  $\mathbb{F}_2$ .)

**Задача 7.9** (E. Artin, O. Schreier). Пусть  $p$  — простое число,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $p \nmid a$ . Доказать, что многочлен  $z^p - z + a$  неприводим. (Указание. Доказать неприводимость над полем  $\mathbb{F}_p$ , воспользовавшись тем, что многочлен не меняется при замене  $z \rightarrow z + 1$ .)

**Задача 7.10** (D. Hilbert). Пусть  $r, s$  — нечётные простые числа, удовлетворяющие условиям  $r \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $\left(\frac{r}{s}\right) = 1$ . Доказать, что многочлен

$$(z + \sqrt{r} + \sqrt{s})(z + \sqrt{r} - \sqrt{s})(z - \sqrt{r} + \sqrt{s})(z - \sqrt{r} - \sqrt{s}) \in \mathbb{Q}[z]$$

неприводим над  $\mathbb{Q}$ , однако приводим по любому модулю  $m \in \mathbb{N}$ .

## 7.2 Конечные расширения

**Задача 7.11** (избавление от иррациональности в знаменателе).

- 1) Представить число  $\frac{1}{3+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$  в виде  $a_0 + a_1\sqrt[3]{2} + a_2\sqrt[3]{4}$  с рациональными  $a_0, a_1, a_2$ . (Ответ:  $\frac{5}{11} - \frac{4}{11}\sqrt[3]{2} + \frac{1}{11}\sqrt[3]{4}$ .)
- 2) Пусть  $\alpha \in \mathbb{C}$  — корень многочлена  $z^3 + z + 1$ . Представить число  $\frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}$  в виде  $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2$  с рациональными  $a_0, a_1, a_2$ . (Ответ:  $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha^2$ .)
- 3) Пусть  $\alpha \in \mathbb{C}$  — корень многочлена  $z^4 + z + 1$ . Представить число  $\frac{1}{1+\alpha+\alpha^3}$  в виде  $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3$  с рациональными  $a_0, a_1, a_2, a_3$ . (Ответ:  $-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{2}{3}\alpha^3$ .)

**Задача 7.12.** Доказать, что число  $\cos \frac{2\pi}{7}$  алгебраическое, и найти его минимальный многочлен. (Ответ:  $z^3 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}$ .)

**Задача 7.13.** Доказать, что  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ , и найти минимальный многочлен числа  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**Задача 7.14.**

- 1) Пусть  $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$ . Доказать, что  $\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = \gamma^2 \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_n^{k_n}$  с некоторыми  $\gamma \in \mathbb{Q}$ ,  $k_j \in \{0, 1\}$ .

2) Пусть  $p_1, \dots, p_n$  — различные простые числа. Доказать, что:

- а) числа  $1, \sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ ;
- б)  $[\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) : \mathbb{Q}] = 2^n$ ;
- в)  $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1} + \dots + \sqrt{p_n})$ .

**Задача 7.15.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{A}$ ,  $\deg \alpha = p$  — простое число,  $\beta = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_{p-1}\alpha^{p-1}$ ,  $a_k \in \mathbb{Q}$ ,  $|a_1| + \dots + |a_{p-1}| > 0$ . Доказать, что  $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$ ; в частности,  $\deg \alpha = \deg \beta$ .

**Задача 7.16.** Найти минимальный мн-н числа  $3 + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$ . (Ответ:  $z^3 - 9z^2 + 33z - 43$ .)

Пусть  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}$ . Каждому числу  $\alpha \in K$  сопоставим линейный оператор  $T_\alpha : K \rightarrow K$  по правилу  $T_\alpha(x) = \alpha x$ . Это соответствие, очевидно, сохраняет операции, т. е. мы получаем вложение поля  $K$  в алгебру линейных операторов (причём линейное над  $\mathbb{Q}$ ).

Характеристический многочлен (унитарный), след и определитель оператора  $T_\alpha$  называются соответственно *характеристическим многочленом*, *следом* и *нормой* числа  $\alpha$  относительно расширения  $K/\mathbb{Q}$ . Обозначения:  $\chi_\alpha(z)$  — характеристический многочлен,  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^K(\alpha) = \text{Tr}(\alpha)$  — след,  $N_{\mathbb{Q}}^K(\alpha) = N(\alpha)$  — норма.

Зафиксируем базис  $\omega_1, \dots, \omega_n$  и рассмотрим матрицу  $A = (a_{i,j})$  оператора  $T_\alpha$  в этом базисе:

$$\alpha \omega_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \omega_i, \quad a_{i,j} \in \mathbb{Q}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (7.1)$$

Тогда  $\chi_\alpha(z) = \det(zI - A)$ ,  $\text{Tr}(\alpha) = \text{Tr} A$ ,  $N(\alpha) = \det A$ .

**Задача 7.17.** Доказать утверждения:

- 1) Если  $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ , то  $\chi_\alpha(z) = P_\alpha(z)$  — минимальный многочлен  $\alpha$ . (Указание. Теорема Гамильтона–Кэли. В данном случае также можно рассмотреть (7.1) как однородную систему линейных уравнений относительно  $\omega_i$ . Либо можно взять базис  $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$  и посчитать непосредственно.)
- 2) Если  $[K : \mathbb{Q}(\alpha)] = d$ , то

$$\chi_\alpha(z) = (P_\alpha(z))^d = \prod_{\sigma} (z - \sigma(\alpha)),$$

где последнее произведение берётся по всем вложениям  $\sigma : K \rightarrow \mathbb{C}$  поля  $K$  в  $\mathbb{C}$ . (Указание. Пусть  $\theta_1, \dots, \theta_d$  — базис расширения  $K/\mathbb{Q}(\alpha)$ ,  $\omega_1, \dots, \omega_m$  — базис расширения  $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ . Если в качестве базиса расширения  $K/\mathbb{Q}$  взять попарные произведения  $\omega_k \theta_l$  в подходящем порядке, то матрица  $A$  будет блочно-диагональной.)

- 3)  $\text{Tr}(\alpha) = \sum_{\sigma} \sigma(\alpha)$ ,  $N(\alpha) = \prod_{\sigma} \sigma(\alpha)$ .

Таким образом, минимальный многочлен для  $\alpha \in K$  можно легко вычислить по формуле

$$P_\alpha(z) = \frac{\chi_\alpha(z)}{(\chi_\alpha(z), \chi'_\alpha(z))}.$$

(Разумеется, метод неопределённых коэффициентов тоже никто не отменял, т. е. можно просто разложить числа  $1, \alpha, \dots, \alpha^n$  по базису и найти коэффициенты линейной зависимости, решив соответствующую СЛАУ.)

### Задача 7.18.

- 1) Пусть  $\alpha \in \mathbb{C}$  — корень многочлена  $z^3 + z + 1$ . Найти минимальные многочлены для чисел  $\alpha^2, \alpha + \alpha^2, \alpha - 2\alpha^2$ . (Ответы:  $z^3 + 2z^2 + z - 1, z^3 + 2z^2 + 5z + 1, z^3 - 4z^2 - z + 13$ .)
- 2) Пусть  $\alpha \in \mathbb{C}$  — корень многочлена  $z^4 - z^3 + 3z^2 - z + 1$ . Найти минимальные многочлены для чисел  $\alpha - 2\alpha^2 + 3\alpha^3, 2\alpha - \alpha^2 + \alpha^3$ . (Ответы:  $z^4 + 4z^3 + 84z^2 - 65z + 25, z^2 - z + 1$ .)

## 7.3 Целые алгебраические числа

Через  $\mathbb{Z}_A$  будем обозначать кольцо всех целых алгебраических чисел. Кроме того, для конечного расширения  $K \supseteq \mathbb{Q}$  пусть  $\mathbb{Z}_K = K \cap \mathbb{Z}_A$  — *кольцо целых чисел поля  $K$* .

**Задача 7.19.** Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ . Доказать, что существует  $d \in \mathbb{N}$ , такое что  $d\alpha_\nu \in \mathbb{Z}_A, 1 \leq \nu \leq n$ .

**Задача 7.20.** Пусть  $d \neq 1$  — бесквадратное целое число (т. е.  $p^2 \nmid d$  для всех простых  $p$ ),  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ . Доказать, что  $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\omega] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ , где

$$\omega = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & d \equiv 1 \pmod{4}, \\ \sqrt{d}, & d \equiv 2, 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

**Задача 7.21.** Пусть  $a \in \mathbb{Q}, a > 0, a \notin \{1, 3, 1/3\}$ . Доказать, что число  $\frac{\arctg \sqrt{a}}{\pi}$  иррационально. (Указание.  $e^{2i \arctg z} = \frac{1+iz}{1-iz}$ .)

Если  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}$ , то *базисом* поля  $K$  называется произвольный базис  $K$  как векторного пространства над  $\mathbb{Q}$ .

**Задача 7.22.** Пусть  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}$  степени  $n$ . Доказать, что существует такой базис  $\omega_1, \dots, \omega_n$  поля  $K$ , что  $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_n$ . (Такой базис называется *фундаментальным*. Указание. Пусть  $K = \mathbb{Q}(\theta), \theta \in \mathbb{Z}_K$ . Доказать, что  $\mathbb{Z}_K$  — подгруппа полного ранга группы (по сложению)  $\frac{1}{d}\mathbb{Z} + \frac{1}{d}\mathbb{Z}\theta + \dots + \frac{1}{d}\mathbb{Z}\theta^{n-1}$  для некоторого  $d \in \mathbb{N}$ .)

**Задача 7.23.** Пусть  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}, \alpha \in \mathbb{Z}_K \setminus \{0\}$ . Доказать, что факторкольцо  $\mathbb{Z}_K/\alpha\mathbb{Z}_K$  конечно, причём  $|\mathbb{Z}_K/\alpha\mathbb{Z}_K| = |N_{\mathbb{Q}}^K(\alpha)|$ . (Указание. Пусть  $\omega_1, \dots, \omega_n$  — фундаментальный базис  $K$ . Тогда  $\alpha\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}\alpha\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\alpha\omega_n$ . Далее см. задачу 5.14.)

**Задача 7.24.** Пусть  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ . Доказать, что  $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{2} + \mathbb{Z}\sqrt[3]{4}$ . (Замечание. Это не очень простая задача.)

**Задача 7.25.** Пусть  $a \in \mathbb{Q}$ . Доказать, что  $2 \cos \pi a \in \mathbb{Z}_A$ , причём все его сопряжённые имеют такой же вид (т. е.  $2 \cos \pi b$ , где  $b \in \mathbb{Q}$ ).

**Задача 7.26** (теорема Кронекера).

- 1) Пусть  $\xi \neq 0$  — целое алгебраическое число, все сопряжённые которого по модулю не превосходят 1. Доказать, что  $\xi$  — корень из 1. (*Указание.* Рассмотреть многочлены  $\prod_{k=1}^d (z - \xi_k^n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $\xi_k$  — (все) сопряжённые с  $\xi$  числа.)
- 2) Пусть  $\alpha$  — целое алгебраическое число, все сопряжённые которого вещественны и лежат на отрезке  $[-2, 2]$ . Доказать, что  $\alpha = 2 \cos \pi a$  для некоторого  $a \in \mathbb{Q}$ . (*Указание.* Записать  $\alpha = \xi + 1/\xi$  и применить п. 1 к числу  $\xi$ .)

**Задача 7.27.**

- 1) Пусть  $P(z) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}[z]$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $P(\alpha) = 0$ . Доказать, что  $\frac{P(z)}{z - \alpha} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}[z]$ .
- 2) Пусть  $P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k) \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}[z]$ . Доказать, что  $a_n \alpha_{k_1} \cdots \alpha_{k_m} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$  для произвольных  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n$ .

## 7.4 Вокруг основной теоремы арифметики

Немного окупёмся в коммутативную алгебру. Далее  $D$  — целостное кольцо (т. е. коммутативное ассоциативное кольцо с  $1 \neq 0$  без делителей нуля).

**Определение 1.** Говорят, что  $\alpha \in D$  делится на  $\beta \in D$  (или  $\beta$  делит  $\alpha$ ), если  $\alpha = \beta\gamma$  для некоторого  $\gamma \in D$ ; обозначение:  $\beta \mid \alpha$  (также иногда пишут  $\beta \setminus \alpha$ ). (В частности,  $0 \mid \alpha$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = 0$ .)

**Определение 2.** Элемент  $\varepsilon \in D$  называется *единицей* кольца  $D$  (также *делителем единицы*, *обратимым элементом*), если  $\varepsilon \mid 1$ , т. е. если  $\exists \varepsilon^{-1}$ . Множество всех единиц кольца  $D$  будем обозначать через  $D^\times$ . Очевидно, что  $D^\times$  — группа по умножению.

**Определение 3.** Элементы  $\alpha, \beta \in D$  называются *эквивалентными* (или *ассоциированными*), если  $\alpha \mid \beta$  и  $\beta \mid \alpha$ ; обозначение:  $\alpha \sim \beta$ .

**Задача 7.28.** Доказать, что  $\alpha \sim \beta$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = \beta\varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon \in D^\times$ .

**Определение 4.** Элемент  $\pi \in D$  называется *неразложимым* (или *неприводимым*), если  $\pi \neq 0$ ,  $\pi \notin D^\times$  и в любом представлении  $\pi = \alpha\beta$ ,  $\alpha, \beta \in D$ , один из элементов  $\alpha, \beta$  — единица кольца  $D$ .

*Замечание.* Элемент  $\alpha \in D \setminus \{0\}$  называется *простым*, если главный идеал  $(\alpha) = \alpha D$  простой. Простой элемент всегда неразложим; обратное верно не всегда, но верно для факториальных колец (см. ниже); более того, если любой неразложимый элемент прост и любой необратимый ненулевой элемент раскладывается на неразложимые, то кольцо факториально.

**Определение 5.** Кольцо  $D$  называется *факториальным* (или *в  $D$  справедлива ОТА*), если любой элемент  $\alpha \in D \setminus \{0\}$  можно представить в виде

$$\alpha = \varepsilon \pi_1 \cdots \pi_s,$$

где  $\varepsilon \in D^\times$ ,  $\pi_k$  — неразложимые элементы,  $s \geq 0$ , причём это представление единственно с точностью до порядка сомножителей и перехода к эквивалентным элементам.

**Задача 7.29.** Доказать, что любое поле факториально.

**Задача 7.30.** Доказать, что кольцо  $\mathbb{Z}$  факториально.

**Определение 6.** Наибольшим общим делителем элементов  $\alpha, \beta \in D$  называется (любой) их общий делитель, который делится на все общие делители  $\alpha$  и  $\beta$ . Если  $\delta$  — НОД  $\alpha$  и  $\beta$ , то будем писать  $(\alpha, \beta) = \delta$ . Например,  $(0, 0) = 0$ . Очевидно, если НОД  $\alpha$  и  $\beta$  существует, то он определён однозначно с точностью до эквивалентности. Аналогично определяется НОД для трёх и более элементов.

**Задача 7.31.** Доказать, что в факториальном кольце любые элементы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  имеют НОД.

**Определение 7.** Кольцо  $D$  называется *целозамкнутым* (в своём поле частных), если любой корень многочлена вида  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \in D[z]$ , лежащий в поле частных кольца  $D$ , принадлежит  $D$ .

**Задача 7.32.** Доказать, что любое факториальное кольцо целозамкнуто.

**Задача 7.33.** Пусть  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}$ ,  $D$  — подкольцо  $K$  с 1, причём  $K$  является полем частных кольца  $D$ . Доказать, что если  $D$  факториально, то  $\mathbb{Z}_K \subseteq D$ . (Указание. Использовать задачу 7.32.)

**Задача 7.34.** Обобщить лемму Гаусса (задача 7.4) на факториальные кольца (т. е. заменить  $\mathbb{Z}$  на факториальное кольцо  $D$ , а  $\mathbb{Q}$  — на поле частных кольца  $D$ ).

**Задача 7.35.** Пусть  $D$  — факториальное кольцо. Доказать, что кольцо многочленов  $D[z]$  также факториально. (Указание. Использовать факториальность кольца многочленов над полем частных кольца  $D$  и лемму Гаусса.)

**Определение 8.** Кольцо  $D$  (коммутативное) называется *кольцом главных идеалов*, если в нём все идеалы главные.

**Задача 7.36.** Доказать, что в (целостном) кольце главных идеалов  $D$  любые два элемента  $\alpha, \beta$  имеют НОД  $\delta$ , причём его можно представить в виде  $\delta = \alpha\mu + \beta\nu$ ,  $\mu, \nu \in D$ .

**Задача 7.37.** Доказать, что любое (целостное) кольцо главных идеалов факториально. (Указание. Существование разложения на неразложимые следует из нётеровости; единственность разложения доказывается так же, как для  $\mathbb{N}$ .)

**Задача 7.38.** Доказать, что кольца  $\mathbb{Z}[x]$  и  $\mathbb{Q}[x, y]$  факториальны, но не являются кольцами главных идеалов.

**Определение 9.** Функция  $\mathcal{N} : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$  называется *евклидовой нормой* (или *евклидовой функцией*) на  $D$ , если для неё справедливы следующие два свойства:

- 1) для любых  $\alpha \in D$ ,  $\beta \in D \setminus \{0\}$  найдутся  $\gamma, \rho \in D$ , такие что  $\alpha = \beta\gamma + \rho$ , причём либо  $\rho = 0$ , либо  $\mathcal{N}(\rho) < \mathcal{N}(\beta)$ ;
- 2) если  $\alpha \neq 0$  делится на  $\beta$ , то  $\mathcal{N}(\alpha) \geq \mathcal{N}(\beta)$ .

Если для  $D$  существует евклидова норма, то  $D$  называется *евклидовым кольцом* (также говорят, что в  $D$  имеет место алгоритм деления с остатком).

**Задача 7.39.** Допустим, что существует функция  $\tilde{N} : D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , обладающая свойством 1 («деление с остатком») из определения евклидовой нормы (такую функцию также иногда называют евклидовой нормой). Доказать, что кольцо  $D$  евклидово. (Указание. Рассмотреть  $N(\alpha) = \min_{\gamma \in D \setminus \{0\}} \tilde{N}(\alpha\gamma)$ .)

**Задача 7.40.** Пусть  $N$  — евклидова норма на  $D$ . Доказать, что если  $\beta$  — собственный делитель  $\alpha \neq 0$  (т. е.  $\beta \mid \alpha$  и  $\alpha \nmid \beta$ ), то  $N(\alpha) > N(\beta)$ .

**Задача 7.41.** Доказать, что в евклидовом кольце любой необратимый ненулевой элемент раскладывается на неразложимые. (Замечание. Это следует из задач 7.42 и 7.37, однако для евклидова кольца доказательство проще, чем для произвольного кольца главных идеалов.)

**Задача 7.42.** Доказать, что любое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов. (Более того, порождающий элемент идеала, заданного конечным числом порождающих, можно искать с помощью алгоритма Евклида. Как следствие, получаем, что любое евклидово кольцо факториально.)

Общая теория закончилась, теперь потренируемся на конках. В качестве примера возьмём кольца целых алгебраических чисел.

**Задача 7.43.** Доказать, что в кольце  $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$  нет неразложимых элементов, однако существуют необратимые ненулевые элементы. (Ergo, кольцо  $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$  не факториально.)

**Задача 7.44.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$ . Доказать, что  $\alpha$  — единица кольца  $\mathbb{Z}_{\mathbb{A}}$  тогда и только тогда, когда  $N(\alpha) = N_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}(\alpha)}(\alpha) = \pm 1$ . (Такие числа называются алгебраическими единицами.)

**Задача 7.45.** Пусть  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ . Доказать, что  $\alpha$  — единица кольца  $\mathbb{Z}_K$  тогда и только тогда, когда  $N_{\mathbb{Q}}^K(\alpha) = \pm 1$ .

**Задача 7.46.** Пусть  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}$ . Доказать, что в кольце  $\mathbb{Z}_K$  любой необратимый ненулевой элемент раскладывается на неразложимые (возможно, неоднозначно).

**Задача 7.47.** Пусть  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}$ , причём кольцо  $\mathbb{Z}_K$  факториально. Доказать, что любой неразложимый элемент кольца  $\mathbb{Z}_K$  делит некоторое простое число  $p \in \mathbb{N}$ , причём такое  $p$  единственно.

Дальше сосредоточимся на квадратичных полях (конечных расширениях  $\mathbb{Q}$  степени 2). В следующей серии задач  $d \neq 1$  — бесквадратное целое число,  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ .

**Задача 7.48.** Доказать, что при  $d \equiv 1 \pmod{4}$  кольцо  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d}$  не факториально. (Указание. См. задачи 7.20 и 7.33.)

**Задача 7.49.** Пусть  $K$  — мнимое квадратичное поле, т. е.  $d < 0$ . Найти все единицы кольца  $\mathbb{Z}_K$ .

**Задача 7.50.** Доказать, что при  $d = -1, \pm 2, \pm 3, 5, -7, -11$  функция  $|N_{\mathbb{Q}}^K(\cdot)|$  является евклидовой нормой на  $\mathbb{Z}_K$ . (Указание. Для любого  $\alpha \in K$  найдётся  $\gamma \in \mathbb{Z}_K$ , такое что  $|N_{\mathbb{Q}}^K(\alpha - \gamma)| < 1$ .)

*Замечание.* Полный список значений  $d$ , для которых справедливо утверждение задачи 7.50:  $-1, \pm 2, \pm 3, 5, 6, \pm 7, \pm 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73$ .

*Замечание.* При  $d = 69$  кольцо  $\mathbb{Z}_K$  евклидово, однако функция  $|N_{\mathbb{Q}}^K(\cdot)|$  не является евклидовой нормой на  $\mathbb{Z}_K$ .

**Задача 7.51.** Доказать, что при  $d = -5$  кольцо  $\mathbb{Z}_K$  не факториально. (*Указание.* Например, рассмотреть равенство  $(1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}) = 2 \cdot 3$ .)

**Задача 7.52.** Доказать, что при  $d = 10$  кольцо  $\mathbb{Z}_K$  не факториально. (*Указание.* Например,  $(\sqrt{10} + 1)(\sqrt{10} - 1) = 3^2$ .)

**Задача 7.53.** Пусть  $d < 0$ ,  $d \neq -1, -2, -3, -7, -11$ . Доказать, что кольцо  $\mathbb{Z}_K$  не евклидово. (*Указание.* Допустив противное, среди необратимых ненулевых элементов  $\mathbb{Z}_K$  рассмотреть число  $\alpha$  с наименьшей евклидовой нормой и доказать, что любое число из  $\mathbb{Z}_K$  сравнимо по модулю  $\alpha$  с одним из чисел  $0, \pm 1$ . Затем воспользоваться задачей 7.23.)

**Задача 7.54.** Доказать, что при  $d = -19$  кольцо  $\mathbb{Z}_K$  не евклидово, но является кольцом главных идеалов ( $\Rightarrow$  факториально). (*Замечание.* Это сложная задача.)

Наконец, познакомимся с некоторыми приложениями всей этой кухни.

**Задача 7.55.** Используя факториальность  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ , найти все целые решения уравнения  $x^3 - y^2 = 2$ . Для этого доказать утверждения:

- 1)  $y$  нечётно.
- 2) Числа  $y \pm \sqrt{-2}$  взаимно просты в кольце  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ .
- 3)  $y + \sqrt{-2} = (a + b\sqrt{-2})^3$  для некоторых  $a, b \in \mathbb{Z}$ .
- 4) Все решения:  $x = 3, y = \pm 5$ .

**Задача 7.56.** Решить в целых числах  $x^3 - y^2 = 4$ . (Ответ:  $(x, y) = (2, \pm 2), (5, \pm 11)$ .)

**Задача 7.57** (неразложимые элементы в кольце целых гауссовых чисел). Пусть  $p$  — простое число ( $p \in \mathbb{N}$ ). Доказать, что в кольце  $\mathbb{Z}[i]$  справедливы следующие разложения на неразложимые множители:

- 1)  $2 \sim (1 + i)^2$ , причём  $1 + i$  — неразложимый элемент  $\mathbb{Z}[i]$ ;
- 2) если  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , то  $p$  — неразложимый элемент  $\mathbb{Z}[i]$ ;
- 3) если  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , то  $p = (a + bi)(a - bi)$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ , причём  $a \pm bi$  неразложимы и не эквивалентны. (*Указание.* Рассмотреть  $c \in \mathbb{Z}$ , такое что  $c^2 + 1 = (c + i)(c - i)$  делится на  $p$ , и вывести отсюда разложимость  $p$  в  $\mathbb{Z}[i]$ .)

**Задача 7.58** (ещё раз суммы двух квадратов). Используя факториальность  $\mathbb{Z}[i]$ , доказать утверждения:

- 1) Пусть  $p$  — простое число,  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Тогда  $p$  представимо в виде суммы двух квадратов (целых чисел), причём единственным образом (с точностью до тривиальных симметрий).

- 2) Для  $n \in \mathbb{N}$  количество целых решений уравнения  $x^2 + y^2 = n$  равно  $4 \sum_{d|n} \chi(d)$ , где  $\chi$  — (единственный) неглавный характер по модулю 4, т. е.

$$\chi(a) = \begin{cases} 0, & a \equiv 0 \pmod{2}, \\ 1, & a \equiv 1 \pmod{4}, \\ -1, & a \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

- 3) Натуральное число  $n$  можно представить в виде  $n = x^2 + y^2$  с взаимно простыми  $x, y$  тогда и только тогда, когда  $n$  не делится на 4 и не делится ни на какое простое  $p \equiv 3 \pmod{4}$ .
- 4) Для любого целого числа  $n > 1$  количество решений уравнения  $x^2 + y^2 = n$  во взаимно простых натуральных  $x, y$  равно количеству решений сравнения  $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod{n}$ .

**Задача 7.59.** Доказать, что уравнение

$$\operatorname{tg}(x \operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(y \operatorname{arctg} x)$$

не имеет решений в натуральных числах  $x \neq y$ . (Указание. Переписать уравнение в виде  $\left(\frac{1+yi}{1-yi}\right)^x = \left(\frac{1+xi}{1-xi}\right)^y$ .)

## 7.5 Круговые многочлены и поля

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Обозначим  $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$ . Многочлен

$$\Phi_n(z) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n-1, \\ (k, n)=1}} (z - \zeta_n^k)$$

называется  $n$ -м круговым многочленом (или многочленом деления круга). Примеры:  $\Phi_1(z) = z - 1$ ,  $\Phi_2(z) = z + 1$ ,  $\Phi_3(z) = z^2 + z + 1$ ,  $\Phi_4(z) = z^2 + 1$ ,  $\Phi_5(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ ,  $\Phi_6(z) = z^2 - z + 1$ . Непосредственно из определения видно, что  $\deg \Phi_n = \varphi(n)$ .

**Задача 7.60.** Доказать, что  $z^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(z)$ . (В частности,  $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ .)

**Задача 7.61.** Доказать, что  $\Phi_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ .

**Задача 7.62.** Пусть  $n > 1$ . Доказать, что  $\Phi_n(0) = 1$ ,  $\Phi_n(1) = e^{\Lambda(n)}$ .

**Задача 7.63.** Доказать, что  $\Phi_n(z) = \prod_{d|n} (z^{n/d} - 1)^{\mu(d)}$ .

**Задача 7.64.** Пусть  $m = \prod_{p|n} p$ . Доказать, что  $\Phi_n(z) = \Phi_m(z^{n/m})$ .

**Задача 7.65.** Пусть  $p$  — простое число,  $p \nmid n$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Доказать, что  $\Phi_{p^\alpha n}(z) = \frac{\Phi_n(z^{p^\alpha})}{\Phi_n(z^{p^{\alpha-1}})}$ .

**Задача 7.66.** Пусть  $n \geq 3$  нечётно. Доказать, что  $\Phi_{2n}(z) = \Phi_n(-z)$ .

**Задача 7.67** (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии  $1 + n\mathbb{Z}$ ).

- 1) Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p$  — простое число,  $p \mid \Phi_n(a)$  для некоторого  $a \in \mathbb{Z}$ , причём  $p \nmid n$ . Доказать, что  $p \equiv 1 \pmod{n}$ . (Указание. Используя то, что  $\Phi_n(z) \mid \frac{z^n - 1}{z^d - 1}$  при  $d \mid n$ ,  $d \neq n$ , доказать, что  $\operatorname{ord}_p a = n$ .)

- 2) Используя п. 1, доказать, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  существует бесконечно много простых  $p \equiv 1 \pmod{n}$ .

**Задача 7.68** (теорема Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии  $-1 + n\mathbb{Z}$ ).

- 1) Рассмотрим многочлены  $A_n(x, y) = (x - yi)^{\varphi(n)} \Phi_n\left(\frac{x+yi}{x-yi}\right)$ . Доказать их свойства:
- $A_n$  — однородный многочлен степени  $\varphi(n)$ .
  - $(x + yi)^n - (x - yi)^n = \prod_{d|n} A_d(x, y)$ .
  - $A_n(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  при  $n > 1$ .
  - Если  $n > 1$ , то все корни многочлена  $P_n(z) = A_n(z, 1)$  вещественные и имеют кратность 1,  $\deg P_n = \varphi(n)$ , а старший коэффициент равен  $e^{\Lambda(n)} > 0$ .
  - Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p$  — простое число,  $p \mid A_n(a, b)$  для некоторых взаимно простых  $a, b \in \mathbb{Z}$ , причём  $p \nmid n$ ,  $p \equiv -1 \pmod{4}$ . Тогда  $p \equiv -1 \pmod{n}$ . (Указание. Используя задачу 7.57, доказать, что в кольце  $\mathbb{Z}[i]$  выполнено  $(a \pm bi, p) = 1$ , поэтому можно рассмотреть  $\alpha = (a + bi)(a - bi)^{-1} \pmod{p\mathbb{Z}[i]} \in (\mathbb{Z}[i]/p\mathbb{Z}[i])^*$ . Как в задаче 7.67, доказать, что  $\text{ord } \alpha = n$ , и воспользоваться тем, что  $(a \pm bi)^{p+1} \equiv a^2 + b^2 \pmod{p\mathbb{Z}[i]}$ .)
- 2) Доказать, что для любого  $n \in \mathbb{N}$  существует бесконечно много простых  $p \equiv -1 \pmod{n}$ . (Указание. Пусть  $n > 1$ . Найти взаимно простые  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}$ , такие что  $A_n(a, b) = -c < 0$ , и рассмотреть число  $A_n(a + 4np_1 \cdots p_m b^{ck}, b)/c$  при достаточно большом  $k \in \mathbb{N}$ .)

**Задача 7.69.** Пусть  $p$  — простое число,  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Используя критерий Эйзенштейна, доказать неприводимость многочлена  $\Phi_{p^\alpha}(z)$ . (Указание. См. задачу 7.7.)

**Задача 7.70.** Доказать неприводимость  $\Phi_n(z)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ . Подробнее:

- Пусть  $f(z)$  — минимальный многочлен числа  $\zeta_n$ ,  $z^n - 1 = f(z)g(z)$ . Доказать, что  $f(z), g(z) \in \mathbb{Z}[z]$ .
- Пусть  $p$  — простое число,  $p \nmid n$ . Доказать, что  $f(z) \mid f(z^p)$ . (Указание. Доказать взаимную простоту  $f(z)$  и  $g(z^p)$ , используя сравнение  $g(z^p) \equiv (g(z))^p \pmod{p}$ .)
- Доказать, что  $f(z) = \Phi_n(z)$ . (Указание. Если  $f(\alpha) = 0$ , то  $f(\alpha^p) = 0$ .)

Поле  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , называется  $n$ -м *круговым полем*.

**Задача 7.71.** Доказать, что  $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$ .

**Задача 7.72.** Доказать, что  $\mathbb{Q}(\zeta_n, \zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{[n,m]})$ , где  $[n, m] = \text{НОК}(n, m)$ .

**Задача 7.73.** Пусть  $n, m \in \mathbb{N}$ . Доказать утверждения:

- $\mathbb{Q}(\zeta_n, \zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{nm})$  тогда и только тогда, когда  $(n, m) = 1$ .
- Многочлен  $\Phi_n(z)$  неприводим над полем  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  тогда и только тогда, когда  $(n, m) \leq 2$ .
- $\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}$  тогда и только тогда, когда  $(n, m) \leq 2$ .

**Задача 7.74.** Пусть  $n \geq 3$ . Доказать, что  $\cos \frac{2\pi}{n}$  — алгебраическое число степени  $\varphi(n)/2$ , и найти все его сопряжённые.

**Задача 7.75.** Пусть  $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$  — многочлен Чебышёва (первого рода),  $n = 2^\alpha m$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $m$  нечётно. Доказать, что  $T_n(z) = 2^{n-1} \prod_{d|m} P_{2^{\alpha+2}d}(z)$ , где  $P_k(z)$  — минимальный многочлен числа  $\cos \frac{2\pi}{k}$ . Получить аналогичное разложение для многочленов Чебышёва второго рода  $U_n(z) = \frac{\sin((n+1) \arccos z)}{\sin(\arccos z)}$ .

**Задача 7.76** (для знакомых с определением группы Галуа).

- 1) Доказать, что  $\mathbb{Q}(\zeta_n)$  — нормальное расширение  $\mathbb{Q}$ , группа Галуа которого изоморфна  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ , причём изоморфизм можно явно задать следующим образом: каждому  $\bar{r} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  соответствует автоморфизм  $\sigma_{\bar{r}}: \mathbb{Q}(\zeta_n) \rightarrow \mathbb{Q}(\zeta_n)$ , такой что  $\sigma_{\bar{r}}(\zeta_n) = \zeta_n^{\bar{r}}$ .
- 2) Фиксируем  $n \in \mathbb{N}$ . Для  $d \mid n$  обозначим  $G_d = \{\bar{r} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \mid r \equiv 1 \pmod{d}\}$ . Доказать равенства:
  - а)  $G_d = \{\bar{r} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \mid \sigma_{\bar{r}}(\alpha) = \alpha \text{ при всех } \alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_d)\}$ ;
  - б)  $\mathbb{Q}(\zeta_d) = \{\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_n) \mid \sigma_{\bar{r}}(\alpha) = \alpha \text{ при всех } \bar{r} \in G_d\}$ . (Указание. Доказать, что степень поля в правой части равенства не превосходит  $[(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* : G_d] = \varphi(d)$ .)
- 3) Доказать, что  $\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap \mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{(n,m)})$ .

**Задача 7.77.** Пусть  $K$  — конечное расширение  $\mathbb{Q}$  степени 2. Доказать, что существует  $n \in \mathbb{N}$ , такое что  $K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$ . (Указание. См. задачу 4.28. Замечание. Это простой частный случай теоремы Кронекера–Вебера:  $K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_n)$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  тогда и только тогда, когда  $K$  — нормальное конечное расширение  $\mathbb{Q}$  с абелевой группой Галуа.)

**Задача 7.78.** Пусть  $p$  — простое число,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\zeta = \zeta_{p^l}$ ,  $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ ,  $\pi = 1 - \zeta$ . Доказать утверждения:

- 1) Если  $\zeta', \zeta''$  — примитивные корни из 1 степени  $n \in \mathbb{N}$ , то  $1 - \zeta' \sim 1 - \zeta''$  в кольце  $\mathbb{Z}[\zeta_n]$ .
- 2) В кольце  $\mathbb{Z}_K$  выполнено  $N_{\mathbb{Q}}^K(\pi) = p \sim \pi^{\varphi(p^l)}$ , причём  $\pi$  — неразложимый элемент  $\mathbb{Z}_K$ .
- 3) Если  $a \in \mathbb{Z}$ , то  $\pi \mid a$  в кольце  $\mathbb{Z}_K$  тогда и только тогда, когда  $p \mid a$ .
- 4) При  $n \in \mathbb{Z}$  выполнено

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}^K(\zeta^n) = \begin{cases} 0, & p^{l-1} \nmid n, \\ -p^{l-1}, & p^{l-1} \mid n, \text{ но } p^l \nmid n, \\ p^l - p^{l-1}, & p^l \mid n. \end{cases}$$

- 5)  $p^l \mathbb{Z}_K \subseteq \mathbb{Z}[\zeta]$ . (Указание. Если  $\alpha = a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_{\varphi(p^l)-1} \zeta^{\varphi(p^l)-1} \in \mathbb{Z}_K$ ,  $a_k \in \mathbb{Q}$ , то  $p^l a_k = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}^K(\alpha \zeta^{-k} - \alpha \zeta^{p^{l-1}r-k}) \in \mathbb{Z}$  для подходящего  $r \in \mathbb{N}$ .)

- 6)  $\mathbb{Z}[\zeta] = \mathbb{Z}[\pi]$ .

- 7)  $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$ . (Указание. Пусть  $\alpha \in \mathbb{Z}_K$ . Тогда  $p^l \alpha = a_0 + a_1 \pi + \dots + a_{\varphi(p^l)-1} \pi^{\varphi(p^l)-1}$ , где  $a_k \in \mathbb{Z}$ . Используя пп. 2 и 3, доказать, что  $p^l \mid a_k$  для всех  $k$ .)

(Замечание. Равенство  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\zeta_n)} = \mathbb{Z}[\zeta_n]$  справедливо для произвольного  $n \in \mathbb{N}$ .)

**Задача 7.79.** Пусть  $p$  — простое число,  $g$  — первообразный корень по модулю  $p$ . Для  $d \mid (p-1)$ ,  $f = \frac{p-1}{d}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$  обозначим

$$S_d(a) = \sum_{k=0}^{f-1} \zeta_p^{ag^{dk}}.$$

(Числа  $S_d(a)$  при  $p \nmid a$  называются *гауссовыми периодами*.) Доказать свойства сумм  $S_d(a)$ :

- 1) если  $p \mid a$ , то  $S_d(a) = f$ ;
- 2)  $S_d(ag^d) = S_d(a)$ ;
- 3) все возможные значения  $S_d(a)$  при  $p \nmid a$  — это  $S_d(g^k)$ ,  $0 \leq k \leq d-1$ ;
- 4) числа  $S_d(g^k)$ ,  $0 \leq k \leq d-1$ , линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ ;
- 5)  $S_d(1)$  — алгебраическое число степени  $d$ , причём все его сопряжённые — это  $S_d(g^k)$ ,  $0 \leq k \leq d-1$ ;
- 6)  $\sum_{k=0}^{d-1} S_d(g^k) = -1$ ;
- 7)  $S_d(a)S_d(b) = \sum_{k=0}^{f-1} S_d(ag^{dk} + b)$ ;
- 8) если  $d = d_1 d_2$ , то  $S_{d_1}(a) = \sum_{k=0}^{d_2-1} S_d(ag^{d_1 k})$ ;
- 9) множество  $K_d = \mathbb{Q}S_d(1) + \mathbb{Q}S_d(g) + \dots + \mathbb{Q}S_d(g^{d-1})$  является конечным расширением  $\mathbb{Q}$  степени  $d$ ;
- 10)  $K_d = \mathbb{Q}(S_d(a))$  при  $p \nmid a$ ;
- 11) если  $d_1 \mid d$ , то  $K_{d_1} \subseteq K_d$ .

## 7.6 Построения с помощью циркуля и линейки

Этот параграф должен существовать.

**Задача 7.80** (теорема Гаусса). Пусть  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ , причём  $\varphi(n) = 2^m$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ , т. е.  $n = 2^\alpha p_1 \cdots p_s$ , где  $\alpha \geq 0$ ,  $p_1 < \dots < p_s$  — простые числа Ферма (имеют вид  $2^{2^k} + 1$ ). Доказать, что правильный  $n$ -угольник можно построить с помощью циркуля и линейки. (Указание. Свести к случаю  $n = p$  и использовать задачу 7.79.)

## Глава 8

# Иррациональные и трансцендентные числа

**Задача 8.1.** Доказать иррациональность чисел, заданных рядами:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2n^2}$ . (Указание. В последнем случае может пригодиться асимптотический закон распределения простых чисел в виде  $\ln[1, 2, \dots, n] \sim n$ ,  $n \rightarrow \infty$ .)

**Задача 8.2** (критерий иррациональности). Пусть  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Допустим, что существуют две последовательности целых чисел  $a_n, b_n$ , такие что  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n \alpha) = 0$ , но  $a_n + b_n \alpha \neq 0$  для бесконечно многих  $n$ . Доказать, что  $\alpha$  иррационально.

**Задача 8.3** (иррациональность  $e^2$  и  $e^4$ ).

1) Домножая равенство

$$e^2 = \sum_{n=0}^N \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

на  $N!/2^{N-1}$  при  $N = 2^m$ , доказать иррациональность числа  $e^2$ . (Указание. Воспользоваться тем, что  $\nu_2(N!) \leq N - 1$ , причём равенство достигается тогда и только тогда, когда  $N = 2^m$ .)

2) Используя ряды для  $e^{\pm 1}$ , доказать, что число  $e$  не является квадратичной иррациональностью. (Указание. Допустив, что  $ae^2 + be + c = 0$  для целых  $a \neq 0, b, c$ , переписать уравнение в виде  $ae + b + ce^{-1} = 0$ , разложить  $e^{\pm 1}$  в ряды, домножить на  $N!$  для подходящего  $N$  и получить противоречие.)

3) Доказать, что число  $e$  не может быть корнем биквадратного уравнения  $ax^4 + bx^2 + c = 0$  с целыми коэффициентами  $a, b, c$ . (В частности,  $e^4 \notin \mathbb{Q}$ .)

**Задача 8.4.** Доказать, что число  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[1, 2, \dots, n]}$  иррационально (где  $[1, 2, \dots, n]$  — наименьшее общее кратное чисел  $1, 2, \dots, n$ ).

**Задача 8.5** (иррациональность  $\pi^2$ ). Доказать иррациональность числа  $\pi^2$  следующим способом. Допустим, что  $\pi^2 = a/b$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ . Рассмотрим многочлены

$$f_n(x) = \frac{b^n x^{2n} (\pi - x)^{2n}}{(2n)!}, \quad F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(2k)}(x).$$

- 1) Доказать, что  $\int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx = F_n(0) + F_n(\pi)$ .
- 2) Доказать, что  $F_n(\pi) = F_n(0) \in \mathbb{Z}$ .
- 3) Получить противоречие при достаточно большом  $n$ .

**Задача 8.6** (вокруг теоремы Лиувилля).

- 1) Для алгебраического числа  $\alpha$  обозначим через  $|\alpha|$  максимум модулей сопряжённых с  $\alpha$  чисел. Доказать следующие свойства  $|\cdot|$ :
  - а)  $|\overline{q\alpha}| = |q| \cdot |\alpha|$  при  $q \in \mathbb{Q}$ ;
  - б)  $|\overline{\alpha \pm \beta}| \leq |\alpha| + |\beta|$ ;
  - в)  $|\overline{\alpha\beta}| \leq |\alpha| \cdot |\beta|$ .
- 2) Доказать (обобщённое) *неравенство Лиувилля*: если  $\xi \neq 0$  — целое алгебраическое число степени  $d$ , то  $|\xi| \geq |\xi|^{1-d}$ .
- 3) Вывести из п. 2 обычную теорему Лиувилля: если  $\alpha$  — алгебраическое число степени  $d$ , то для любого рационального числа  $p/q \neq \alpha$  выполнено неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^d},$$

где  $c(\alpha)$  — некоторая положительная постоянная, зависящая только от  $\alpha$ .

- 4) Доказать, что число  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^{n^2}}$  трансцендентно.
- 5) Пусть  $\alpha$  — алгебраическое число,  $0 < |\alpha| < 1$ . Доказать, что число  $\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{n!}$  трансцендентно. (*Указание.* Допустив противное, рассмотреть  $\beta - \sum_{n=0}^N \alpha^{n!}$ , избавиться от знаменателя и применить обобщённое неравенство Лиувилля.)

Напомним, что числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$  называются *алгебраически независимыми над полем*  $F \subseteq \mathbb{C}$ , если для любого многочлена  $P(z_1, \dots, z_m) \in F[z_1, \dots, z_m] \setminus \{0\}$  выполнено  $P(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq 0$ . Если  $F = \mathbb{Q}$ , то слова «над полем  $F$ » обычно опускают.

**Задача 8.7.** Доказать, что числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$  алгебраически независимы над  $\mathbb{Q}$  тогда и только тогда, когда они алгебраически независимы над  $\mathbb{A}$ . (*Указание.* Вспомнить доказательство алгебраической замкнутости  $\mathbb{A}$ .)

**Задача 8.8** (континуум алгебраически независимых чисел). Рассмотрим числа

$$\alpha_t = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^{|tn!|}}, \quad t > 0.$$

Доказать, что для любых различных  $t_1, \dots, t_m$  числа  $\alpha_{t_1}, \dots, \alpha_{t_m}$  алгебраически независимы. (*Указание.* От противного. Допустим, что  $P(\alpha_{t_1}, \dots, \alpha_{t_m}) = 0$ . Обозначим

$$a_j(N) = \sum_{n=0}^{N-1} 2^{-2^{|t_j n!|}}, \quad 1 \leq j \leq m, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Разложив  $P$  в ряд Тейлора в точке  $(\alpha_{t_1}, \dots, \alpha_{t_m})$  и используя то, что произведения

$$(a_1(N) - \alpha_{t_1})^{k_1} \dots (a_m(N) - \alpha_{t_m})^{k_m}$$

для разных  $(k_1, \dots, k_m)$  стремятся (при  $N \rightarrow \infty$ ) к нулю с разной скоростью, доказать, что при достаточно больших  $N$  будет выполнено

$$0 < |P(a_1(N), \dots, a_m(N))| < 2^{-2^{t_0 N}}$$

для некоторого  $t_0 > 0$ . Учтывая, что  $P(a_1(N), \dots, a_m(N))$  — это рациональные числа с не слишком большими знаменателями, получить противоречие.)

**Задача 8.9.** Доказать эквивалентность двух формулировок теоремы Линдемана–Вейерштрасса:

- 1) Если  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  — различные алгебраические числа, то числа  $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$  линейно независимы над  $\mathbb{A}$ .
- 2) Если алгебраические числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  линейно независимы над  $\mathbb{Q}$ , то числа  $e^{\alpha_1}, \dots, e^{\alpha_m}$  алгебраически независимы над  $\mathbb{A}$ .

**Задача 8.10.** Пусть  $\alpha \in \mathbb{A}^*$ . Используя теорему Линдемана–Вейерштрасса, доказать, что числа  $1, \cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{ch} \alpha, \operatorname{sh} \alpha$  линейно независимы над  $\mathbb{A}$ ; в частности, числа  $\cos \alpha, \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ch} \alpha, \operatorname{sh} \alpha, \operatorname{th} \alpha$  трансцендентны.

**Задача 8.11.** Фиксируем  $m \in \mathbb{N}$ . Для  $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  определим функции

$$f_k(z) = f_{m,k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(mn+k)!}.$$

Пусть числа  $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{A}^*$  различны. Используя теорему Линдемана–Вейерштрасса, доказать, что  $1 + ml$  чисел

$$1, f_k(\alpha_j), \quad 0 \leq k \leq m-1, 1 \leq j \leq l,$$

линейно независимы над  $\mathbb{A}$  (в частности, все числа  $f_{m,k}(\alpha_j)$  трансцендентны). (Указание. Выразить функции  $f_k(z)$  через функции  $\exp(\sqrt[m]{z} e^{2\pi i a/m})$ ,  $0 \leq a \leq m-1$ .)

**Задача 8.12.** Доказать эквивалентность двух формулировок теоремы Гельфонда–Шнайдера (ака седьмой проблемы Гильберта):

- 1) Пусть  $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$ , причём  $\alpha \neq 0, \ln \alpha \neq 0, \beta \notin \mathbb{Q}$ . Тогда число  $\alpha^\beta = e^{\beta \ln \alpha}$  трансцендентно.
- 2) Пусть  $a, b \in \mathbb{A}^*$ , причём  $\ln b \neq 0, \frac{\ln a}{\ln b} \notin \mathbb{Q}$ . Тогда число  $\frac{\ln a}{\ln b}$  трансцендентно.

**Задача 8.13.** Используя теорему Гельфонда–Шнайдера, доказать трансцендентность чисел:  $e^\pi; \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{a}}{\pi}$  при рациональном  $a > 0, a \notin \{1, 3, 1/3\}$ . (Указание. См. задачу 7.21.)

**Задача 8.14.** Рассмотрим число  $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}$ . Доказать, что  $\alpha$  трансцендентно, но не является числом Лиувилля. Подзадачи:

- 1) Обозначим  $q_N = 2^{2^N}, p_N = q_N \sum_{n=0}^N 2^{-2^n}, N \in \mathbb{N}_0$ . Доказать утверждения:
  - а) Справедливы неравенства

$$\frac{1}{q_N^2} < \alpha - \frac{p_N}{q_N} < \frac{2}{q_N^2},$$

причём дробь  $p_N/q_N$  несократима.

б) Если  $p/q = p_N/q_N$  для некоторого  $N$ , то

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^2}.$$

в) Пусть  $p/q \neq p_N/q_N$  для всех  $N$ . Возьмём  $N \in \mathbb{N}$ , такое что  $\frac{1}{4}q_{N-1} < q \leq \frac{1}{4}q_N$ . Тогда

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{2qq_N} > \frac{1}{32q^3}.$$

(Указание. Воспользоваться тем, что  $\left| \frac{p-q\alpha}{p_N-q_N\alpha} \frac{q}{q_N} \right| = \left| \frac{p}{p_N} \frac{q}{q_N} \right| \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .)

(Замечание. На самом деле можно доказать, что для некоторой положительной постоянной  $c$  всегда выполнено  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^2}$ .)

2) (Метод Малера.) Рассмотрим функцию  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ ,  $|z| < 1$ .

а) Доказать, что  $f(z^2) = f(z) - z$ .

б) Доказать, что функция  $f(z)$  трансцендентна. (Указание. Например, воспользоваться тем, что для любого двоично-рационального числа  $q = a/2^n$  выполнено  $\lim_{r \rightarrow 1-0} |f(re^{2\pi i q})| = +\infty$ .)

в) Пусть  $d \in \mathbb{N}$ . Доказать, что найдутся многочлены  $P_0(z), \dots, P_d(z) \in \mathbb{Z}[z]$  с  $\deg P_k \leq d$ , не все равные 0 и такие, что для функции

$$F(z) = \sum_{k=0}^d P_k(z) f^k(z)$$

выполнено  $F(0) = F'(0) = \dots = F^{(d^2)}(0) = 0$ . (Указание. Коэффициенты многочленов должны удовлетворять системе линейных уравнений.)

г) Пусть  $F$  — функция, построенная выше. Доказать, что для всех достаточно больших  $N$  выполнено

$$0 < |F(2^{-2^N})| < 2^{-2^N d^2}.$$

д) Используя пункты 2а и 2г, доказать трансцендентность числа  $\alpha = f(1/2)$ . (Указание. Выразить  $f(2^{-2^N})$  через  $\alpha$  и подставить в  $F(2^{-2^N})$ . Далее, предположив противное, применить обобщённое неравенство Лиувилля и для подходящего  $d$  получить противоречие при  $N \rightarrow \infty$ .)

(Замечание. Другие примеры нелиувиллевых трансцендентных чисел — это  $e$  и  $\pi$ . Для  $e$  нелиувиллевать проще всего получить из разложения в цепную дробь; с числом  $\pi$  ситуация посложнее.)