

Элементы теории чисел

Механико-математический факультет МГУ
1 поток 1 курса, осень 2026г.

Лекция 4: Мультипликативные функции и их свойства.
Функция Мёбиуса и формула обращения. Функция Эйлера.
Суммы делителей и количество делителей натурального
числа.

Основные определения и утверждения прошлой лекции

Показатели $\nu_p(n)$ и их свойства.

Формулы:

$$n = \prod_{p|n} p^{\nu_p(n)} = \prod_p p^{\nu_p(n)},$$

$$\nu_p([a_1, \dots, a_m]) = \max\{\nu_p(a_1), \dots, \nu_p(a_m)\}$$

$$\nu_p((a_1, \dots, a_m)) = \min\{\nu_p(a_1), \dots, \nu_p(a_m)\}$$

$$(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_{n-2}, (a_{n-1}, a_n)),$$

$$[a_1, \dots, a_n] = [a_1, \dots, a_{n-2}, [a_{n-1}, a_n]],$$

- Целой частью действительного числа x называется наибольшее целое число k , удовлетворяющее неравенству $k \leq x$. Обозначается эта функция $[x]$.
- Функция $\{x\} = x - [x]$ называется *дробной частью* числа x . Она удовлетворяет неравенствам $0 \leq \{x\} < 1$ и имеет период 1.

$$\text{НОК}\{n \leq x\} = \prod_{p \leq x} p^{\left[\frac{\ln x}{\ln p}\right]}.$$

$$\nu_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Глава 3. Арифметические функции.

§3.1. Мультипликативные функции и их свойства.

Функция $\theta(n)$, определенная на множестве натуральных чисел, называется *мультипликативной*, если для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b выполняется равенство

$$\theta(ab) = \theta(a)\theta(b).$$

Пример: $\theta(n) = n^s$, $s \in \mathbb{R}$ есть мультипликативная функция.

Если $\theta(n) \neq 0$ мультипликативная функция, то $\theta(1) = 1$.

Действительно, если $a \in \mathbb{N}$ таково, что $\theta(a) \neq 0$, то $\theta(a) = \theta(a \cdot 1) = \theta(a)\theta(1)$. Сокращая это равенство на $\theta(a)$, находим $1 = \theta(1)$.

Если $a = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r} \in \mathbb{N}$, то для мультипликативной функции $\theta(n)$ имеем

$$\theta(a) = \theta(p_1^{k_1}) \cdots \theta(p_r^{k_r}) = \prod_{p|a} \theta(p^{\nu_p(a)}). \quad (1)$$

Любая мультипликативная функция однозначно определяется заданием её значений на степенях простых чисел.

Задав произвольным способом функцию на степенях простых чисел и определив её значения на всех натуральных числах с помощью равенств (1), мы получим мультипликативную функцию.

Произведение мультипликативных функций есть мультипликативная функция. Действительно, если $\theta(n) = \theta_1(n) \cdot \theta_2(n)$, где $\theta_1(n)$ и $\theta_2(n)$ – мультипликативные функции, то для любых $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$,

$$\theta(ab) = \theta_1(ab)\theta_2(ab) = \theta_1(a)\theta_1(b)\theta_2(a)\theta_2(b) = \theta(a) \cdot \theta(b).$$

Опишем ещё один способ строить мультипликативные функции.

Лемма 1

Пусть $\theta(n)$ – мультипликативная функция и функция $f(n)$ определена равенством

$$f(n) = \sum_{d|n} \theta(d), \quad n \geq 1,$$

где суммирование происходит по всем натуральным делителям числа n . Тогда $f(n)$ – мультипликативная функция и

$$f(n) = \prod_{p|n} (1 + \theta(p) + \theta(p^2) + \dots + \theta(p^{\nu_p(n)})). \quad (2)$$

Произведение берётся по всем простым делителям числа n .

Доказательство.

Рассмотрим какие-нибудь натуральные взаимно простые числа a и b . Для каждого делителя $d|ab$ определим $d_1 = (d, a)$ и $d_2 = (d, b)$. Если p - простое число и $p \nmid b$, то $\nu_p(b) = \nu_p(d_2) = 0$ и

$$\begin{aligned}\nu_p(d_1 d_2) &= \nu_p(d_1) = \min(\nu_p(d), \nu_p(a)) = \\ &= \min(\nu_p(d), \nu_p(ab)) = \nu_p(d).\end{aligned}$$

Аналогичное рассуждение проходит и в случае, если $p \nmid a$, а поскольку $(a, b) = 1$, заключаем, что для любого простого числа p выполняется либо $p \nmid b$, либо $p \nmid a$ и потому для каждого простого p выполняется равенство $\nu_p(d_1 d_2) = \nu_p(d)$, так что $d_1 d_2 = d$. □

Рассуждение проходит и в обратную сторону. Если $d_1|a$, $d_2|b$ и $d_1d_2 = d$, то при $p|a$ выполняется $p \nmid b$, так что $\nu_p(b) = \nu_p(d_2) = 0$ и

$$\min(\nu_p(d), \nu_p(a)) = \min(\nu_p(d), \nu_p(ab)) = \nu_p(d) = \nu_p(d_1).$$

Равенство $\min(\nu_p(d), \nu_p(a)) = 0 = \nu_p(d_1)$ выполняется и в случае, когда $p \nmid a$. Следовательно $d_1 = (d, a)$. Аналогично доказывается, что $d_2 = (d, b)$.

Итак, каждый натуральный делитель d числа ab единственным образом представляется в виде произведения $d = d_1d_2$, где $d_1|a$, $d_2|b$.

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} f(ab) &= \sum_{d|ab} \theta(d) = \sum_{d_1|a} \sum_{d_2|b} \theta(d_1)\theta(d_2) = \\ &= \left(\sum_{d_1|a} \theta(d_1) \right) \left(\sum_{d_2|b} \theta(d_2) \right) = f(a)f(b). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $f(n)$ мультипликативна.

Пользуясь мультипликативностью для $n = p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$, находим

$$f(n) = f(p_1^{k_1}) \cdot \dots \cdot f(p_r^{k_r}) = \prod_{j=1}^r (1 + \theta(p_j) + \theta(p_j^2) + \dots + \theta(p_j^{k_j})).$$

И это завершает доказательство леммы.

§3.2. Функция Мёбиуса и формулы обращения.

Функцией Мёбиуса $\mu(n)$ называется мультипликативная функция, определённая на степенях простых чисел следующим образом

$$\mu(p) = -1, \quad \mu(p^k) = 0, \quad k \geq 2.$$

Пользуясь мультипликативностью её можно доопределить на всех натуральных числах следующим образом

1. $\mu(1) = 1$;
2. $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа;
3. $\mu(p_1 p_2 \dots p_r) = (-1)^r$, если все простые числа $p_1, p_2, \dots, p_r$ различны.

Например,

$$\mu(5) = \mu(7) = -1, \quad \mu(6) = \mu(10) = 1, \quad \mu(8) = \mu(9) = 0.$$

Лемма 2

Справедливы равенства

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 1, \\ 0 & \text{если } n > 1, \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \quad (4)$$

Доказательство леммы 2.

- Равенство (3) в случае $n = 1$, очевидно, выполняется. Пусть далее $n > 1$. Поскольку $\mu(n)$ – мультипликативная функция, то равенство (2) и определение функции Мёбиуса дают

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \prod_{p|n} (1 + \mu(p)) = 0.$$

Равенство (3) полностью доказано.

- Доказательство равенства (4) подобно приведённому выше доказательству (3). Функция $\theta(n) = \frac{\mu(n)}{n}$, равная произведению двух мультипликативных функций $\mu(n)$ и $\frac{1}{n}$, по доказанному выше, также будет мультипликативной. Согласно определению функции Мёбиуса для неё выполняется равенство

$$1 + \theta(p) + \theta(p^2) + \dots = 1 + \theta(p) = 1 - \frac{1}{p}.$$

Применяя к $\theta(n)$ равенство (2) из леммы 2 легко приходим к равенству (4).

Формула обращения Мёбиуса.

Теорема 8

Пусть $f(n)$ – произвольная функция натурального аргумента и

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

- При $n = 1$ имеем $g(1) = f(1)$, и требуемое равенство выполняется.
- Пусть $n \geq 2$. Согласно определению функции $g(n)$ находим

$$\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{c|\frac{n}{d}} f(c) = \sum_{c|n} f(c) \sum_{d|\frac{n}{c}} \mu(d).$$

- По лемме 2 сумма $\sum_{d|\frac{n}{c}} \mu(d)$ отлична от нуля лишь в случае $c = n$. В этом случае она равна 1. Теорема доказана.

Функция Эйлера.

- Для каждого целого числа $n \geq 1$ обозначим символом $\varphi(n)$ функцию Эйлера, т.е. количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n . **Примеры:**

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(p) = p - 1, \quad \varphi(p^r) = p^r - p^{r-1}.$$

- Свойства функции Эйлера:

Теорема 9

1. Для любого натурального $n \geq 2$ выполняется равенство

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

2. Функция Эйлера мультипликативна, т.е. для любых двух натуральных взаимно простых чисел a и b имеем

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Доказательство первого утверждения теоремы.

По лемме 2 при любом натуральном k выполняется равенство

$$\sum_{d|(k,n)} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{если, } (k, n) = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому справедливо представление

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{d|(k,n)} \mu(d) \right). \quad (5)$$

В этой двойной сумме внешнее суммирование происходит по переменной k , а внутреннее по переменной d . Поменяем порядок суммирования, сделав внешним суммирование по d , а внутренним – суммирование по k .

Продолжение доказательства первого утверждения.

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{d|(k,n)} \mu(d) \right) = \sum_{d|n, d|k, 1 \leq k \leq n} \mu(d) = \\ &= \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = n \cdot \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}.\end{aligned}$$

Первую сумму можно представить в виде суммы слагаемых $\mu(d)$, взятых для каждой пары чисел k, d , удовлетворяющих условиям $1 \leq k \leq n, d|n, d|k$.

- Соберем вместе слагаемые суммы (5), отвечающие одному и тому же делителю d числа n . Ясно, что они будут появляться при k делящихся на d , т.е. при $k = d, 2d, 3d, \dots, n$. Количество слагаемых, отвечающих фиксированному значению d равно $\frac{n}{d}$. Первое утверждение следует отсюда с помощью (4).

Доказательство второго утверждения теоремы.

Второе утверждение теоремы может быть выведено из первого с помощью основной теоремы арифметики. Действительно

$$\begin{aligned}\varphi(a) \cdot \varphi(b) &= a \prod_{p|a} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot b \prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \\ &= ab \prod_{p|ab} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \varphi(ab).\end{aligned}$$

- Другими словами это рассуждение можно пересказать так: из первого утверждения теоремы следует, что функция Эйлера есть произведение двух мультипликативных функций n и $\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, а потому она мультипликативна.

Второе доказательство первого утверждения теоремы 9.

Обозначим для каждого натурального числа r , делящего n ,

$$A_r = \{k | 1 \leq k \leq n, (k, n) = r\}$$

- Тогда

$$k \in A_r \Leftrightarrow k = r \cdot \ell, 1 \leq \ell \leq \frac{n}{r}, (k, n) = r.$$

- Следовательно $(\ell, \frac{n}{r}) = 1$, и $|A_r| = \varphi(\frac{n}{r})$. Отсюда находим

$$\sum_{r|n} \varphi(\frac{n}{r}) = n \quad \text{или} \quad \sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

- Применив к последнему равенству формулу обращения Мёбиуса, находим

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = n \cdot \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Суммы и количество делителей натурального числа.

При любом целом $s \geq 0$ функция n^s мультипликативна. Согласно лемме 1 мультипликативной будет и функция

$$\sigma_s(n) = \sum_{d|n} d^s.$$

При $s = 0$ и $s = 1$ так получаются функции

$$\tau(n) = \sigma_0(n) = \sum_{d|n} 1 \quad \sigma(n) = \sigma_1(n) = \sum_{d|n} d$$

- соответственно количество и сумма делителей числа n .

Если $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$, то по лемме 1 имеем

$$\sigma_s(n) = \prod_{j=1}^m (1 + p_j^s + \cdots + p_j^{s \cdot k_j}) =$$

$$\prod_{j=1}^m \frac{p_j^{s(k_j+1)} - 1}{p_j^s - 1} = \prod_{p|n} \frac{p^{s(\nu_p(n)+1)} - 1}{p^s - 1}.$$

В частности, находим

$$\tau(n) = (k_1 + 1) \cdots (k_m + 1), \quad \sigma(n) = \prod_{p|n} \frac{p^{k_j+1} - 1}{p_j - 1}.$$

- Заметим также, что $\tau(n)$ равно количеству решений в натуральных числах x, y уравнения $x \cdot y = n$.

Конец 4-й лекции