ВОПРОСЫ К СПЕЦИАЛЬНОМУ КУРСУ "Аналитические функции и трансцендентные числа"

2016-2017 учебный год, лектор: проф. Ю.В. Нестеренко

1. Эллиптические функции. Основной параллелограмм решётки периодов. Общие теоремы об эллиптических функциях (Существование полюсов в параллелограмме периодов, сумма вычетов в параллелограмме периодов, суммы порядков полюсов и нулей в параллелограмме периодов, сумма полюсов и нулей в параллелограмме периодов с учётом кратностей.). Порядок эллиптической функции. [3], гл.1, §1, [1], гл. 1, §3-5.

2. Функции Вейерштрасса $\mathfrak{P}(z)$. Теорема сложения для функции $\mathfrak{P}(z)$ и её производной. Удвоение точек. [3], гл.1, §2, 3, [1], гл. 1, §8.

3. Выражение произвольных эллиптических функций через $\mathfrak{P}(z)$ и её производную. [3], гл.1, §2, теорема 4, [1], гл. 1, §9.

4. Дифференциальное уравнение для эллиптической функции Вейерштрасса. Инварианты $\mathfrak{P}(z)$, их выражение через периоды. [3], гл.1, §2, теорема 5, [1], гл. 1, §7.

5. Условия алгебраической зависимости эллиптических функций Вейерштрасса $\mathfrak{P}(z)$. [6], Дополнение А, §13.

6. Функция $\zeta(z)$. Производная функции $\zeta(z)$. Теорема сложения для $\zeta(z)$. Квазипериоды и соотошение Лежандра. [1], гл. 1, §11, 12.

7. Функция $\sigma(z)$. Выражение эллиптических функций через $\sigma(z)$. [1], гл. 1, §13, 14.

8. Порядок роста целых и мероморфных во всей плоскости функций. Порядок роста функций $\sigma(z)$, $\zeta(z)$, $\mathfrak{P}(z)$, [6], [7].

9. Теорема Шнейдера-Ленга (без доказательства), её следствие для функций $az + b\zeta(z), \mathfrak{P}(\alpha), \mathfrak{P}'(\alpha)$. Линейная независимость над полем алгебраических чисел периода, соответствующего квазипериода и 1 эллиптической функции Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами. Трансцендентность в тех же условиях периодов и квазипериодов функции Вейерштрасса, её значений в алгебраических точках и т.п.). гл. 6, §1.6, 3.6, [7]

10. Теорема Шнейдера-Ленга (без доказательства), вывод из неё теоремы Шнейдера о трансценденности значений модулярной функции $j(\tau)$ в алгебраических точках $\tau \in \mathbb{C}$, $\Im\tau > 0$, степени большей 2. [7]

11. Модулярная группа. Модулярные функции и формы. [5]

12. Лемма о сходимости ряда по точкам двумерной решётки. Ряды Эйзенштейна и их свойства. [5]

13. Разложение в ряд Фурье рядов Эйзенштейна $E_{2k}(\tau), k \geq 2$. [5]

14. Нули и полюсы модулярной функции веса $2k$. Функции дискриминант $\Delta(\tau)$ и модулярный инвариант $j(\tau)$. [5]

15. Целость коэффициентов рядов Фурье дискриминанта и модулярного инварианта. [3], гл.4, §1.

16. Нули и полюсы модулярных функций. Базис в пространстве модулярных форм заданного веса. Размерность этого пространства. [5]

17. Необращение в нуль дискриминанта и разрешимость уравнения $j(\tau) = c$ при любом комплексном c. [3], гл.3, теорема 4, следствия 1 и 2.

18. Параметризация любой эллиптической кривой $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ эллиптическими функциями $\mathfrak{P}(\alpha), \mathfrak{P}'(\alpha)$. [1], часть II, гл. 4, §3,4.

19. Выражение любой модулярной функции веса 0 через $j(\tau)$. [5], гл. 7, предложение 6, [3], гл.5, теорема 2.

20. Система дифференциальных уравнений для рядов Эйзенштейна. [4], гл. 10, теорема 5.3.

21. Разложение дискриминанта в бесконечное произведение. Неотрицательность коэффициентов ряда Фурье для дискриминанта. [7].

22. Действие модулярной группы на множестве матриц с целыми, взаимно простыми в совокупности элементами и с фиксированным определителем $N > 0$. Представители смежных классов. [3], гл.5, §1.

23. Количество смежных классов при действии модулярной группы из вопроса 22. [3], гл.5, §1.

24. Модулярное уравнение для $j(\tau)$. [3], гл.5, §2.

25. Неприводимость и симметричность модулярного многочлена. [3], гл.5, §2, теорема 3.

26. Алгебраичность значений модулярного инварианта в мнимых квадратичных точках. [3], гл.5, §2, теорема 4.

27. Леммы об оценке сверху абсолютной величины модулярного инварианта и оценке снизу абсолютной величины дискриминанта. [7].

28. Лемма об оценке степени, знаменателя и максимума модулей сопряженных алгебраического числа $j(S\xi)$ при любом натуральном S и таком комплексном ξ, $\Im\xi > 0$, что $j(\xi)$ есть алгебраическое число. [7].

29. Гипотеза Малера об алгебраичности при любом ξ, $\Im\xi > 0$, по крайней мере одного из двух комплексных чисел $e^{2\pi I\xi}$, $j(\xi)$. Конструкция вспомогательной функции. [7]

30. Оценка сверху модуля вспомогательной функции в окрестности точки $z = 0$ и оценка кратности нуля этой функции в точке $e^{2\pi I\xi}$. [7].

31. Построение многочлена $B(x, z)\mathbb{Z}[x, z]$ с отличным от нуля значением в точке $\left(j(\xi),\, e^{2\pi I\xi}\right)$, оценка сверху абсолютной величины этого значения и завершение доказательства гипотезы Малера. [7].

Список литературы

[1] Гурвитц А., Курант Р., Теория функций, М., Наука, 1968.

[2] Ленг С., Алгебра, М., Мир, 1968.

[3] Ленг С., Эллиптические функции, М., Наука, 1984.

[4] Ленг С., Введение в теорию модулярных форм, М., Мир, 1979.

[5] Серр Ж.П., Курс арифметики, М., Мир, 1972.

[6] Фельдман Н.И., Седьмая проблема Гильберта, М., Изд-во МГУ, 1982.

[7] Нестеренко Ю.В., Конспект лекций, 2016-2017 учебный год.