Спецкурс "Регрессия"

Шкляев А.В.

17 января 2019 г.

1 Асимптотические свойства оценок вне нормальной модели

1.1 Регрессия с ограничениями

При дополнительных ограничениях $C\vec{a} = \vec{r}$ мы строили оценки

$$\widehat{a}_R = \widehat{a} - (X^tX)^{-1}C^t(C(X^tX)^{-1}C^t)^{-1}(C\widehat{a} - \vec{r}).$$

Эта задача равносильна задаче минимизации

$$||X\widehat{a} - X\vec{a}|| = ||\widehat{a} - \vec{a}||_{X^tX}$$

по $\vec{a}$ при условии $C\vec{a} = \vec{r}$. Здесь $||\vec{y}||_Q = y^tQy$ — скалярное произведение с матрицей Грамма Q.

Можно рассмотреть более общую задачу: поиск $\vec{a}$ из соображений

$$||\widehat{a} - \vec{a}||_U \to \min$$

при условии $C\vec{a} = \vec{r}$, где U — некоторая симметричная положительно определенная матрица.

Из тех же соображений что и раньше мы получим оценку

$$\widehat{a}_{MD} = \widehat{a} - U^{-1}C^t(CU^{-1}C^t)^{-1}(C\widehat{a} - \vec{r}).$$

Такая оценка называется оценкой минимальных расстояний. В частном случае $U = (X^tX)^{-1}$ мы получаем оценку МНК с ограничением $C\vec{a} = \vec{r}$.

Исследуем асимптотические свойства такого рода оценок при $n \to \infty$. Пусть $U = U_n$ — матрицы, задающие расстояние. Потребуем дополнительно выполнение двух условий: $U_n \xrightarrow{P} U$, $U > 0$ п.н., $\operatorname{rank} C = m$.

Теорема 1. *1) В условиях теоремы 3 прошлой лекции при описанных выше условиях $\widehat{a}_{MD}$ состоятельная оценка $\vec{a}$.*
2) В условиях теоремы 1 этой лекции при описанных выше условиях $\widehat{a}_{MD}$ асимптотически нормальная оценка $\vec{a}$ с асимптотической матрицей ковариации

$$S_{MD} = S - U^{-1}C(C^tU^{-1}C)^{-1}C^tS - SC(C^tU^{-1}C)^{-1}C^tU^{-1} + U^{-1}C(C^tU^{-1}C)^{-1}S(C^tU^{-1}C)^{-1}C^tU^{-1},$$

где $S = Q^{-1}RQ^{-1}$.

Доказательство. 1) Воспользуемся формулой для $\widehat{a}_{MD}$:

$$\widehat{a}_{MD} - \vec{a} = (\widehat{a} - \vec{a}) - U_n^{-1}C^t(CU_n^{-1}C^t)^{-1}(C\widehat{a} - \vec{r}).$$

Первое слагаемое стремится по вероятности к нулю из состоятельности $\widehat{a}$, второе из того, что $C(\widehat{a} - \vec{a})$ стремится к нулю из состоятельности $\widehat{a}$, $U_n^{-1} \to U$, $CU_n^{-1}C^t \to CUC^t$.

2) Для доказательства предельной теоремы представим $\widehat{a}_{MD}-\vec{a}$ в виде

$$(\widehat{a}_{MD}-\vec{a})=(E-U_n^{-1}C^t(CU_n^{-1}C^t)^{-1}C)(\widehat{a}-\vec{a}).$$

Остается воспользоваться теоремой об асимптотической нормальности $\widehat{a}$, откуда

$$\sqrt{n}(\widehat{a}-\vec{a})\xrightarrow{d} Z\sim\mathcal{N}(0,S),$$

$S=Q^{-1}RQ^{-1}$, $R=(\mathbf{E}X_{1,i}X_{1,j}\varepsilon_1^2)$. Следовательно,

$$\sqrt{n}(\widehat{a}_{MD}-\vec{a})\xrightarrow{d} Z\sim\mathcal{N}(0,(E-U^{-1}C^t(C^tU^{-1}C)^{-1}C)S(E-U^{-1}C^t(C^tU^{-1}C)^{-1}C)^t),$$

что и требовалось доказать. □

Мы бы хотели выбрать матрицу U скалярного произведения таким образом, чтобы дисперсия оценок $\widehat{a}_{MD}$ была минимальна, иначе говоря, выбрать эффективную оценку. Более удобно формулировать это в терминах

$$\vec{a}^tS_{MD}(U^*)\vec{a}\le\vec{a}^tS_{MD}(U)\vec{a}$$

при всех $\vec{a}$. Иначе говоря,

$$S_{MD}(U)-S_{MD}(U^*)$$

положительно определена при данном U. Оказывается, что справделива следующая теорема

Теорема 2. *Минимум $S_{MD}(U)$ в описанном выше смысле достигается при $U=S^{-1}$. Соответствующая оценка при этом имеет вид*

$$\widehat{a}_{EMD}=\widehat{a}-\widehat{S}C^t(C\widehat{S}C^t)^{-1}(C\widehat{a}-\vec{r}),$$

а ее асимптотическая ковариационная матрица

$$S_{EMD}=S-SC^t(CSC^t)^{-1}CS.$$

Доказательство теоремы отложим на следующую лекцию.

Оценка $\widehat{a}_{EMD}$ является наиболее эффективной в классе оценок минимального расстояния. При этом в случае гомоскедастичности

$$\mathbf{E}(\varepsilon^2|X)=\sigma^2$$

выполнено тождество $S=\sigma^2Q^{-1}$, откуда

$$\widehat{a}_{EMD}=\widehat{a}-Q^{-1}C^t(CQ^{-1}C^t)^{-1}(C\widehat{a}-\vec{r}),$$

то есть совпадает с МНК при ограничениях $C\vec{a}=\vec{r}$.