Итак, на прошлом занятии мы доказали следующий результат:

Теорема 1. *Пусть X_i — н.о.р. случайные величины с математическим ожиданием $\mathbf{E}X = \mu$ и дисперсией $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$, имеющие решетчатое распределение со сдвигом a и шагом d. Тогда справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\left(S_n = x\right) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \to \infty,$$

равномерно по $x \in an + d\mathbb{Z}$.

Более того, если мы будем рассматривать семейство распределений $X_i \sim F_\alpha(x)$ при некоторых α, то полученные оценки будут равномерны по α, если:
a) дисперсии σ_α^2 при всех α лежат в некотором отрезке $[\sigma_-, \sigma_+] \subset (0, \infty)$.
b) $\sup_{t\in[\delta,M],\alpha} |\psi_\alpha(t)| < 1$.
c) $g_{n,\alpha}(t) < \varepsilon e^{-t^2/2}$ при любом $\varepsilon > 0$, достаточно больших n и всех α, где

$$g_n(t) = e^{n \ln \psi_{\frac{X_1-\mu}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} - e^{-t^2/2}.$$

В этом случае оценки 1) будут равномерны по α, x, а значит будут равномерными и оценки 2).

Пусть $X_i \sim F$, $R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty$ при $h \in [h^-, h^+]$, кроме того $\mathbf{E}X^2 e^{h^+X} < \infty$, $\mathbf{E}X^2 e^{h^-X} < \infty$. Рассмотрим

$$F^{(h)}(x) = \frac{1}{R(h)} \int_{-\infty}^{x} e^{hu} \mathbf{P}(X \in du)$$

при $h \in [h^-, h^+]$.

Теорема 2. *Пусть X_i — н.о.р. случайные величины, имеющие решетчатое распределение со сдвигом a и шагом d. Тогда соотношение*

$$\mathbf{P}\left(S_n^{(h)} = x\right) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ n \to \infty,$$

выполнено равномерно по $x \in an + d\mathbb{Z}$ и $h \in [h^-, h^+]$.

Доказательство. Мы докажем несколько ослабленную версию, в которой предполагается, что $R(h)$ конечна в некотором интервале, содержащем $[h^-, h^+]$. Для доказательства достаточно показать, что выполнены условия a), b), c) равномерности. Заметим, что

$$\psi_{X_1^{(h)}}(t) = \frac{1}{R(h)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{hx} dF(x) = \frac{R(it+h)}{R(h)}.$$

Посмотрим более внимательно на функцию $R(z)$ как функцию комплексного переменного.

Лемма 1. *В рассматриваемых условиях при $h \in [h^-, h^+]$*

1. *функция $R(z)$ определена в полосе $h^- \le Rez \le h^+$;*
2. *$R(z)$ аналитична в открытой полосе $h^- < Rez < h^+$, причем*

$$R^{(k)}(z) = \mathbf{E}X^k e^{zX}.$$

Доказательство. 1. Заметим, что

$$R(z) = |\mathbf{E}e^{zX}| \le \mathbf{E}|e^{zX}| = R(Rez),$$

откуда и вытекает первое утверждение Леммы.

2. Заметим, что
$$\frac{R(z+\Delta z)-R(z)}{\Delta z}=\mathbf{E}e^{zX}\left(\frac{e^{\Delta z\cdot X}-1}{\Delta z}\right).$$
Величины под знаком математического ожидания при Δz сходятся к Xe^{ZX} п.н. Таким образом, нам достаточно показать, что они удовлетворяют условию теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, то есть найдется Y, т.ч.
$$\mathbf{E}Y<\infty,\quad \left|e^{zX}\left(\frac{e^{\Delta z\cdot X}-1}{\Delta z}\right)\right|\le Y$$
при всех достаточно малых Δz. Но
$$\left|e^{zX}\right|=e^{RezX},\quad \left|e^{\Delta z\cdot X}-1\right|=|\Delta zX|e^{|\Delta z\cdot X|},$$
В последнем неравенстве мы воспользовались соотношением
$$|e^z-1|\le|z|e^{|z|},$$
справедливом при всех $z\in\mathbb{C}$ в силу аналитичности комплексной экспоненты:
$$|e^z-1|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}\right|=|z|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{(k-1)!}\le|z|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}=|z|e^{|z|}.$$
Таким образом,
$$\left|e^{zX}\right|\cdot\frac{\left|e^{\Delta z\cdot X}-1\right|}{|\Delta z|}\le e^{Rez\cdot X}e^{\delta|X|}=:Y,$$
где $|\Delta z|\le\delta$. При этом
$$\mathbf{E}Y\le R(Rez+\delta)+R(Rez-\delta)<\infty$$
при достаточно малом δ.

$\square$

Теперь мы готовы доказывать выполнение условий a)-c).

1. Для доказательства a) заметим, что функция $\sigma(h)$ непрерывна и неотрицательна при $h\in[0,\tilde{h}]$. Следовательно, она ограничена и остается доказать лишь то, что она ненулевая. Но если $\sigma(h)$ нулевая, то $X^{(h)}$ константа п.н., в частности, она принимает те же значения, что и X.
2. Для доказательства b) предположим противное. Тогда при некоторых $0<\delta<M$ найдется набор $h_n\in[0,\tilde{h}]$, $t_n\in[\delta,\pi]$, таких что $\limsup_{n\to\infty}|R(h_n+it_n)/R(h_n)|=1$. Выделим из h_n сходящуюся подпоследовательность, а из соответствующей подпоследовательности t_n — сходящуюся подпоследовательность, то есть $h_{n_k}\to h$, $t_{n_k}\to t$, $t\in[\delta,\pi]$, при $k\to\infty$. Но тогда $|R(h+it)/R(h)|=1$ (здесь мы воспользовались непрерывностью $R(\cdot)$), то есть $|\psi_{X^{(h)}}(t)|=1$. Но $X^{(h)}$ имеет ту же решетку, что и X:
$$P(X^{(h)}\in A)=\frac{1}{R(h)}\int_A e^{hx}P(X\in dx).$$
Это, как мы помним, противоречит $|\psi_{X^{(h)}}(t)|=1$. Мы пришли к противоречию, откуда b) справедливо.
3. Для доказательства c) нам достаточно доказать, что первые три члена ряда Тейлора приближают $\ln\psi_{X^{(h)}}(tn^{-1/2})$ равномерно по h при по $|t|\le\delta n^{-1/2}$. То есть
$$\ln\psi_{X^{(h)}}(s)=c(h)s+d(h)s^2+o(1)s^2$$
для некоторых $c(h)$, $d(h)$, где $o(1)$ равномерно мало по рассматриваемым h при $s\to0$. Для этого

достаточно доказать аналогичное соотношение

$$\psi_{X^{(h)}}(s) = 1 + \widetilde{c}(h)s + \widetilde{d}(h)s^2 + o(1)s^2$$

для некоторых $\widetilde{c}(h)$, $\widetilde{d}(h)$ и равномерно малой по h величины $o(1)$.
Пусть $R(h+it) = a(h,t) + ib(h,t)$, где a, b — вещественная и мнимая части $R(h)$. Из разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

$$a(h,t) = a(h,0) + a'_t(h,0)t + a''_{tt}(h,\xi)\frac{t^2}{2},\ b(h,t) = b(h,0) + b'_t(h,0)t + b''_{tt}(h,\chi)\frac{t^2}{2},$$

где $\xi \in [0,t]$, $\chi \in [0,t]$. При этом

$$R(h+it) = a(h,0) + b(h,0) + (a'_t(h,0) + b'_t(h,0)i)t + (a''_{tt}(h,0) + ib''_{tt}(h,0))\frac{t^2}{2} + o(t^2) = \\ R(h) + itR'(h) + \frac{(it)^2}{2}R''(h) + o(t^2).$$

Из единственности разложения в ряд Тейлора, имеем $R(h) = a(h,0) + ib(h,0)$, $iR'(h) = a'_t(h,0) + ib'_t(h,0)$, $-R''(h) = (a''_{tt}(h,0) + ib''_{tt}(h,0))$, а значит

$$\left|R(h+it) - \left(R(h) + itR'(h) + \frac{(it)^{2\,\prime\prime}}{R}(h)\right)\right| = \frac{t^2}{2}\left(|a''_{tt}(h,\xi) - a''_{tt}(h,0)| + |b''_{tt}(h,\chi) - b''_{tt}(h,0)|\right).$$

Величина $(|a''_{tt}(h,\xi) - a''_{tt}(h,0)| + |b''_{tt}(h,\chi) - b''_{tt}(h,0)|)$ при $t \le \delta$ не превосходит удвоенного модуля непрерывности $\sup_{|z-\tilde{z}|<\delta}|R''(z) - R''(\tilde{z})|$, который в силу соотношения

$$|R''(z) - R''(\tilde{z})| \le \mathbf{E}\left|e^{zX}\right|\left|e^{(\tilde{z}-z)X} - 1\right| \le |\tilde{z} - z|\mathbf{E}e^{RezX}e^{|\tilde{z}-z|X}$$

может быть сделан меньше любого заданного $\varepsilon > 0$ при достаточно малом δ. Тем самым, $\psi_{X^{(h)}}(t)$ равномерно по h приближается первыми тремя членами ряда Тейлора. Следовательно, аналогичный факт верен и для $\psi_{\frac{X^{(h)}-\mu(h)}{\sigma(h)}}(t)$, поскольку $\mu(h)$, $\sigma(h)$ — непрерывные, а значит ограниченные на отрезке $[0,\tilde{h}]$ функции. Отсюда требуемый факт верен и для логарифма, что и требовалось доказать.

□