Во втором семестре мы будем изучать точную асимптотику больших уклонений.
Давайте сперва разберемся с понятиями локальных и интегро-локальных вероятностей. Здесь для нас есть два принципиально различных случая.

Определение 1. *Величина называется решетчатой, если найдутся такие a, d, что*

$$\mathbf{P}(X \in a + d\mathbb{Z}) = 1.$$

Максимальное из возможных таких d называется шагом решетки.
Величина, не являющаяся решетчатой, называется нерешетчатой.

Задача 1. *Показать, что d это НОД чисел $x_2 - x_1$,...,$x_n - x_1$, где x_i — возможные значения X.*

Задача 2. *Показать, что множество значений $\{S_n - an,\ n \in \mathbb{N}\}$ при некотором N содержит все точки $\{kd,\ k \in \mathbb{Z}, k > N\}$.*

Начнем с теоремы, принадлежащей Гнеденко:

Теорема 1 (Локальная предельная теорема)**.** *Пусть X_i — н.о.р. решетчатые случайные величины с математическим ожиданием $\mathbf{E}X = \mu$ и дисперсией $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$ с решеткой $a + kd$, $k \in \mathbb{Z}$, где d — шаг решетки. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left(-\frac{(k - \mu n)^2}{2\sigma^2 n}\right) + \frac{o(1)}{\sqrt{n}},$$

при всех $k \in an + d\mathbb{Z}$, причем $o(1)$ равномерно мало по всем k.

Эта теорема более общая чем центральная предельная теорема (в ограничении на решетчатый случай). Действительно,

$$\mathbf{P}(S_n - \mu n \in [b\sqrt{n}, c\sqrt{n}]) = \sum_{k \in [b\sqrt{n}, c\sqrt{n}]} \mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{k \in [b\sqrt{n}, c\sqrt{n}]} \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left(-\frac{k^2}{2\sigma^2 n}\right) + o(1),$$

где $o(1)$ выносится за пределы суммы из-за равномерной малости. Полученная сумма является интегральной для интеграла

$$\int_b^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} dx,$$

что и дает нам ЦПТ.
А что в нерешетчатом случае?

Теорема 2 (Интегро-локальная теорема Стоуна)**.** *Пусть X_i — н.о.р. случайные величины с математическим ожиданием $EX = \mu$ и дисперсией $DX = \sigma^2 > 0$, имеющие нерешетчатое распределение. Тогда при всех Δ_n достаточно медленно стремящихся к 0 справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\left(S_n \in [x, x + \Delta_n)\right) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x - \mu n)^2}{2n\sigma^2}}.$$

при всех $x - \mu n = O(\sqrt{n})$, причем равномерно по $x - \mu n \in [-t\sqrt{n}, t\sqrt{n}]$ при любом $t > 0$.

Доказательство теоремы 1. Будем доказывать теорему на основе формулы обращения для дискретного случая

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \psi_{X_1}^n(t) dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-\frac{itk}{\sigma\sqrt{n}}} \psi_{X_1}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt.$$

Положим $x = \frac{k - an}{\sqrt{n}\sigma}$, тогда

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} e^{-it\frac{a}{\sigma}\sqrt{n}} \psi_{X_1}^n\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) dt = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx} \psi_{\frac{X_1 - a}{\sigma}}^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt.$$

При этом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-t^2/2}dt,$$

откуда

$$\left|\mathbf{P}(S_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}}\right| = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}} \times$$
$$\left|\int_{\delta\sigma\sqrt{n}\le|t|\le\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}\psi^n_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt + \int_{|t|\ge\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}e^{-t^2/2}dt + \int_{|t|<\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}\left(\psi^n_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2}\right)dt\right|$$

Нам достаточно показать, что все три интеграла в данном разложении могут быть сделаны сколь угодно малыми. Для второго интеграла это не представляет труда:

$$\int_{|t|>\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2}dx = \left(1 - 2\Phi\left(\delta\sigma\sqrt{n}\right)\right) \to 0,\ n\to\infty.$$

Для оценки первого воспользуемся неравенством

$$\left|\int_{\delta\sigma\sqrt{n}<|t|<\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}\psi^n_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)dt\right| \le \pi\sigma\sqrt{n}q^n,$$

где $\sup_{\delta<|s|<\pi}|\psi_{X_1}(s)| = q$. Нам достаточно показать, что $q < 1$, тогда правая часть неравенства будет экспоненциально стремиться к нулю при $n\to\infty$.
На лекции мы остановились здесь.
Заметим, что если $\psi_{X_1}(s_0) = e^{is_0 b}$, то $\psi_{X_1-b}(s_0) = 1$, откуда $\mathbf{E}\cos(X_1 - b) = 1$ и

$$\mathbf{P}\left(X_1 \in \left\{b + \frac{2\pi k}{s_0},\ k\in\mathbb{Z}\right\}\right) = 1.$$

Тогда шаг X_1 будет не менее $\frac{2\pi}{s_0}$, что, в сочетании с решетчатостью и $d = 1$ дает $s_0 > 2\pi$. Это противоречит $\delta < s < \pi$, то есть $q < 1$ и оцениваемый интеграл экспоненциально мал по n.

Тем самым, для доказательства требуемой формулы, нам достаточно показать, что при достаточно малых δ

$$\frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{n}}\int_{|t|<\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-itx}\left(\psi^n_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - e^{-t^2/2}\right)dt < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Для этого требуется оценить

$$\int_{|t|<\delta\sigma\sqrt{n}} e^{-t^2/2}\left|e^{n\left(\ln\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)+\frac{t^2}{2n}\right)} - 1\right|dt.$$

При любом $\varepsilon > 0$ и достаточно малом δ при $|s| < \delta$ верно неравенство

$$\left|\ln\psi_{\frac{X_1-a}{\sigma}}(s) + \frac{s^2}{2}\right| < \varepsilon s^2.$$

Тогда оцениваемый интеграл не превосходит

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\max\left(e^{\varepsilon t^2} - 1, 1 - e^{-\varepsilon t^2}\right)dt < \varepsilon_1$$

при любом $\varepsilon_1 > 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$. □