Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

6 декабря 2018 г.

Глава 1

Применения теоремы Гартнера-Эллиса

1.1 Применения теоремы Гартнера-Эллиса

1.1.1 Редкие события в случайном блуждании

Пусть S_n — случайное блуждание,

$$R_m = \max\left\{l-k:\ 0 \le k < l \le m,\ \frac{S_l - S_k}{l-k} \in A,\right\},\ T_r = \inf\left\{l:\ \exists k \le l-r:\ \frac{S_l - S_k}{l-k} \in A\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть A таково, что существует положительный предел*

$$I_A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in A).$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln R_m}{m} = \lim_{r\to\infty} \frac{r}{\ln T_r} = \frac{1}{I_A}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}(T_r \le m) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=k+r}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_l - S_k}{l-k} \in A\right) = m \sum_{n=r}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right).$$

При этом

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right) \le \exp(-(I_A - \varepsilon)n),$$

откуда

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_r \le \exp(r(I_A - 2\varepsilon))) \le \sum_{r=1}^{\infty} \exp(r(I_A - 2\varepsilon)) \frac{\exp(-(I_A-\varepsilon)r)}{1-\exp(-(I_A-\varepsilon))} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\exp(-\varepsilon r)}{1-\exp(-(I_A-\varepsilon))} < \infty.$$

Следовательно, по лемме Борели-Кантелли с вероятностью единица выполнено лишь конечное число $T_r \le \exp(r(I_A - 2\varepsilon))$, т.е.

$$\liminf \frac{\ln T_r}{r} \ge I_A.$$

Для оценки снизу используем неравенство

$$\mathbf{P}(T_r \le m) \ge \mathbf{P}\left(\cup_{l=1}^{[m/r]} \frac{S_{lr} - S_{(l-1)r}}{r} \in A\right),$$

откуда

$$\mathbf{P}(T_r > m) \le \exp(-[m/r]\mathbf{P}(S_r/r \in A)).$$

Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_r > \exp(r(I_A + \varepsilon))) < \infty$$

и по лемме Бореля-Кантелли имеем требуемое. $\square$

1.1.2 Малые и умеренные уклонения

Достаточно очевидно, что если мы вместо n везде поставим какую-либо другую целочисленную последовательность $1/a_n \to \infty$, то получим аналогичный результат с условием

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \ln R_{Z_n}(a_n h) \to \ln R(h),$$

и результатом, где n будет заменена на a_n. Вопрос сведения одного к другому есть просто вопрос перепараметризации Z_n в виде Z_{a_n}. Да и целочисленность здесь не столь важна, поскольку замена a_n на $[a_n]$ не меняет ни условия, ни утверждения. С помощью этого нехитрого рассуждения удается получить теорему об умеренных уклонениях:

Теорема 2. *Пусть X_i — н.о.р. случайные векторы, $\mathbf{E}X_1 = 0$, Σ_{X_1} — матрица ковариации X_1 обратима, $R(h)$ конечна в некоторой окрестности нуля. Тогда $Z_n = \frac{1}{\sqrt{na_n}} S_n$, $a_n \to \infty$, $a_n = o(n)$ удовлетворяет*

$$-\frac{1}{2}\inf_{A_{int}} \tilde\Lambda(\theta) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \ln \mathbf{P}(Z_n \in A) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \ln \mathbf{P}(Z_n \in A) \le -\frac{1}{2}\inf_{\overline{A}} \tilde\Lambda(\theta),$$

с $\tilde\Lambda(\theta) = (\theta, \Sigma^{-1}\theta)$.

Доказательство. Положим $R(h) = e^{(h,\Sigma h)/2}$. Тогда

$$\Lambda(\theta) = \sup((h,\theta) - (h,\Sigma h)/2) = -(\theta, \Sigma^{-1}\theta)/2,$$

поскольку максимум достигается при $((h,\theta) - (h,\Sigma h)/2)' = \theta - \Sigma h = 0$. Таким образом, нам достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ln R_{Z_n}(a_n^{-1} h) \to \ln R(h) = (h, \Sigma h)/2.$$

При этом

$$\ln R_{Z_n}(a_n^{-1}h) = \ln \mathbf{E} e^{(S_n,h)a_n^{-1/2}n^{-1/2}} = n \ln R_{X_1}(h(na_n)^{-1/2}).$$

Но для $b_n = (na_n)^{-1/2} \to 0$

$$R_{X_1}(hb_n) = 1 + (R'_{X_1}(0), h)b_n + \frac{(R''_{X_1}(0)h, h)}{2} b_n^2 + O(b_n^3),$$

где $R'_{X_1}(0) = \vec{0}$, $R''_{X_1}(0) = \Sigma$, откуда

$$\ln R_{X_1}(hb_n) = \ln\left(1 + \frac{(R''_{X_1}(0)h,h)}{2} b_n^2 + O(b_n^3)\right) = O(b_n^3) + \frac{(\Sigma h, h) b_n^2}{2}.$$

Следовательно,

$$na_n \ln R_{X_1}(h(na_n)^{-1/2}) \to (\Sigma h, h)/2,$$

что и требовалось доказать. □

Пример 10.1. Рассмотрим скалярные X_i, $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{D}X_i = 1$ и поглядим на $P(S_n \ge n^\beta x)$, $x > 0$, $\beta \in (1/2, 1)$. Тогда $\tilde\Lambda(\theta) = \theta^2/2$ и теорема приобретает вид

$$\lim \frac{\mathbf{P}(n^{(\alpha-1)/2} S_n \ge \theta)}{n^\alpha} = -\theta^2/2.$$

Полагая $\alpha = 1 - 2\beta$, имеем

$$\lim \frac{\mathbf{P}(S_n \ge n^\beta \theta)}{n^{2\beta-1}} = -\theta^2/2.$$

То есть

$$\mathbf{P}(S_n \ge n^\beta\theta) \approx e^{-\frac{n^{2\beta-1}\theta^2}{2}}.$$

Стоит отметить, что если S_n была бы $\mathcal{N}(0,n)$, как предлагает аппроксимировать ЦПТ, то

$$\mathbf{P}(S_n \ge n^\beta\theta) = \mathbf{P}(S_n n^{-1/2} \ge n^{\beta-1/2}\theta) \sim e^{-n^{2(\beta-1/2)}\theta^2/2} = e^{-n^{2\beta-1}\theta^2/2}$$

Таким образом, нормальная аппроксимация в ЦПТ достаточна для грубой асимптотики вероятностей $\mathbf{P}(S_n \ge n^\beta\theta)$. Отметим, что речь идет только о грубой асимптотике.