Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

3 декабря 2018 г.

Теорема Гартнера-Эллиса

Закончим доказательство теоремы Гартнера-Эллиса.
2.2) Как и в теореме Крамера предположим, что супремум в определении Λ недостижим. Тогда рассмотрим $\vec{X}_n = \vec{Y}_n + \vec{Z}_n$, $\vec{Y}_n \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{E}/(Mn))$ и не зависит от $\vec{Z}_n$, где M — некоторый параметр, E — единичная матрица. Тогда

$$\ln R_{\vec{X}_n}(n\vec{h}) = \ln R_n(n\vec{h}) + \frac{n}{2M}|\vec{h}|^2 \geq \ln R_n(n\vec{h})$$

и

$$\ln \tilde{R}(\vec{h}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln R_{X_n}(n\vec{h}) = \ln R(\vec{h}) + \frac{n}{2M}|\vec{h}|^2 \geq \ln R(h), \ \tilde{\Lambda}(\vec{\theta}) \leq \Lambda(\vec{\theta}),$$

где $\tilde{\Lambda}(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{\theta}, \vec{h}) - \ln \tilde{R}(\vec{h}))$. При этом $\ln R(\vec{h}) \geq (\vec{h}, \vec{\mu})$, где $\vec{\mu} = grad \ln R(\vec{0})$, существующий в силу дифференцируемости $\ln R$. , а значит

$$(\vec{h}, \vec{x}) - \ln \tilde{R}(\vec{h}) \leq (\vec{h}, (\vec{x} - \vec{\mu})) - \frac{1}{2M}|\vec{h}|^2 \to -\infty,$$

$h \to \infty$. Следовательно, супремум в $\tilde{\Lambda}(\vec{\theta})$ достижим в конкретной точке $\vec{h}$, удовлетворяющей условию $\vec{x} = grad \ln \tilde{h}(\vec{h})$.
В силу 2.1)

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\vec{X}_n \in U_{\delta/2}(\vec{x})) \geq -\tilde{\Lambda}(\vec{x}) \geq -\Lambda(\vec{x}).$$

При этом

$$\mathbf{P}(\vec{Z}_n \in U_{\delta}(\vec{x})) \geq \mathbf{P}(\vec{X}_n \in U_{\delta/2}(\vec{x})) - \mathbf{P}(|\vec{Y}_n| > \delta/2).$$

Модуль вектора больше $\delta/2$ только если одна из координат больше по модулю $\delta/(2\sqrt{d})$. Значит

$$\mathbf{P}(|\vec{Y}_n| > \delta/2) \leq 2d\left(1 - \Phi\left(\frac{\delta^2\sqrt{nM}}{2d}\right)\right).$$

В силу соотношения

$$\Phi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x^2/2},$$

имеем $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}((Y_1 + ... + Y_n)/n > \delta/2)) \leq -M\delta^2/(2d)$. Аналогично рассуждениям пункта 1.2), отсюда следует требуемое утверждение.

Пример 11.1. В прошлый раз мы показали, что теорему Гартнера-Эллиса можно применить к функционалу от марковской цепи $Z_n = n^{-1}\sum_{i=0}^n g(X_i)$. Рассмотрим частный случай эмпирической меры цепи, то есть $g(k) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, где 1 стоит на k месте. Мы показали, что если рассмотреть матрицу $q(h)_{i,j} = p_{i,j}e^{h_j}$ и положить $\lambda(h)$ — ее максимальное с.з., то $\Lambda(\theta) = \sup_h((\theta, h) - \ln \lambda(h))$. Докажем, что на самом деле она равна

$$\sup_{\vec{u}: u_i > 0} \sum_{j=1}^k \theta_j \ln \frac{u_j}{(uP)_j}.$$

Действительно, при любом $\vec{u} > 0$ рассмотрим $h_i = \ln(u_i/(uP)_i)$. Тогда

$$(uQ)_j = \sum_{i=1}^k u_i p_{i,j} \frac{u_j}{(uP)_j} = u_j,$$

откуда u — перронов вектор, а 1 — перроново собственное значение и $\lambda(h) = 1$. При этом

$$\Lambda(\theta) \geq (\theta, h) - \ln \lambda(h) = \sum_{j=1}^k \theta_j \ln \frac{u_j}{(uP)_j}.$$

В обратную сторону — рассмотрим $\vec{h}$, $\vec{u}$ — левый собственный вектор матрицы Q с максимальным собственным значением. Тогда

$$(\theta, \vec{h}) - \ln \lambda(\vec{h}) = \sum_{j=1}^k \theta_j \left(h_j - \ln \frac{(uQ)_j}{u_j}\right) = \sum_{j=1}^k \theta_j \left(\ln \frac{u_j e^{h_j}}{(uQ)_j}\right) = \sum_{j=1}^k \theta_j \ln \frac{u_j}{(uP)_j},$$

откуда имеем нужное соотношение.
Таким образом,

$$\Lambda(\theta) = \sup_{\vec{u}: u_i > 0} \sum_{j=1}^k \theta_j \ln \frac{u_j}{(uP)_j}.$$

Пусть S_n — случайное блуждание,

$$R_m = \max\left\{l - k : \ 0 \leq k < l \leq m, \ \frac{S_l - S_k}{l - k} \in A, \right\}, \ T_r = \inf\left\{l : \ \exists k \leq l - r : \ \frac{S_l - S_k}{l - k} \in A\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть A таково, что существует положительный предел*

$$I_A = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in A).$$

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\ln R_m}{m} = \lim_{r\to\infty} \frac{r}{\ln T_r} = \frac{1}{I_A}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}(T_r \le m) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=k+r}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_l - S_k}{l-k} \in A\right) = m \sum_{n=r}^{\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right).$$

При этом

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A\right) \le \exp(-(I_A - \varepsilon)n),$$

откуда

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_r \le \exp(r(I_A - 2\varepsilon))) \le \sum_{r=1}^{\infty} \exp(r(I_A - 2\varepsilon)) \frac{\exp(-(I_A-\varepsilon)r)}{1-\exp(-(I_A-\varepsilon))} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\exp(-\varepsilon r)}{1-\exp(-(I_A-\varepsilon))} < \infty.$$

Следовательно, по лемме Борели-Кантелли с вероятностью единица выполнено лишь конечное число $T_r \le \exp(r(I_A - 2\varepsilon))$, т.е.

$$\liminf \frac{\ln T_r}{r} \ge I_A.$$

Для оценки снизу используем неравенство

$$\mathbf{P}(T_r \le m) \ge \mathbf{P}\left(\cup_{l=1}^{[m/r]} \frac{S_{lr} - S_{(l-1)r}}{r} \in A\right),$$

откуда

$$\mathbf{P}(T_r > m) \le \exp(-[m/r]\mathbf{P}(S_r/r \in A)).$$

Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{P}(T_r > \exp(r(I_A + \varepsilon))) < \infty$$

и по лемме Бореля-Кантелли имеем требуемое. □