Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

25 октября 2018 г.

Принцип больших уклонений

Закончим доказательство теоремы Крамера

Теорема 5.1. (Крамера) Пусть S_n — случайное блуждание с $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ (это матожидание всегда существует, возможно являясь бесконечным). Тогда меры $\mathbf{P}(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(x) = \sup_h(hx - \ln R(h))$.

Доказательство. Проведем оценку снизу. На прошлой лекции мы доказали, что доказательство оценки снизу равносильно

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n/n \in (x-\delta, x+\delta)) \geq -\Lambda(x).$$

Более того, мы можем рассматривать блуждание с шагами $X_i - x$, для которого задача сведется к

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta, \delta)) \geq -\Lambda(0).$$

- Пусть $R(h) < \infty$ при всех $h \in \mathbb{R}$, распределение величины X сосредоточено на $[-a, a]$, причем не сосредоточено на $[0, a]$ или $[-a, 0]$.
  Тогда при любом h

  $$\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)) \geq \int_{-\delta}^{\delta}\mathbf{P}(S_n/n \in du) = R(h)^n\int_{-\delta}^{\delta} e^{-hun}\mathbf{P}(S_n^{(h)}/n \in du) \geq R(h)^n e^{-|h|\delta)n}\mathbf{P}(S_n^{(h)}/n \in (-\delta,\delta)).$$

  При этом $R(h) \to \infty$, $|h| \to \infty$. Действительно, $\mathbf{E}e^{hX} \geq e^{h\varepsilon}\mathbf{P}(X > \varepsilon) \to \infty$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и $h \to \infty$. Значит $\inf_{h\in\mathbb{R}} R(h) = R(\widetilde{h})$ при некотором $\widetilde{h}$, $R'(\widetilde{h}) = 0$. При этом

  $$m(\widetilde{h}) = \mathbf{E}X^{(\widetilde{h})} = (\ln R(h))'_{h=\widetilde{h}} = 0.$$

  В силу ЗБЧ $\mathbf{P}(S_n^{(\widetilde{h})}/n \in (-\delta,\delta)) \to 1$, $n \to \infty$. Отсюда

  $$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)) \geq -(\widetilde{h}(x+\delta) - \ln R(\widetilde{h})) + \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(S_n^{(\widetilde{h})}/n \in (-\delta,\delta)) \geq -\Lambda(x) - \widetilde{h}\delta.$$

  В силу произвольности δ имеем требуемое.

- Пусть распределение не сосредоточено ни на $\mathbb{R}^+$, ни на $\mathbb{R}^-$. Фиксируем $M > 0$ и рассмотрим наши величины на отрезке $(-M, M)$, т.е. рассмотрим

  $$\mathbf{Q}_n((-\delta,\delta)) := \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)|X_i \in (-M,M), i \leq M) = \mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta), X_i \in (-M,M), i \leq M)\mathbf{P}(X_1 \in (-M,M))^{-n}.$$

  Тогда

  $$\begin{aligned}\lim\inf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)) &\geq \lim\inf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta), X_i \in (-M,M), i \leq M)\\ &\geq \lim\inf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\mathbf{Q}_n((-\delta,\delta)) - \ln\mathbf{P}(X_1 \in (-M,M)).\end{aligned}$$

  К мерам Q_n в силу пункта а) можно применить теорему и получить, что правая часть записанного тождества есть

  $$-\Lambda_M(0) - \ln\mathbf{P}(X_1 \in (-M,M)) = -\ln\inf(\mathbf{E}(e^{hX_1}|X_1 \in (-M,M))) - \ln\mathbf{P}(X_1 \in (-M,M))$$

  При $M \to \infty$ второе слагаемое стремится к 0. Покажем, что первое стремится к $-\ln\inf R(h)$. Действительно, если $\inf R(h) = I$, то при каждом $\varepsilon > 0$ найдется $\widetilde{h}$: $R(\widetilde{h}) \leq I + \varepsilon$. Но тогда

  $$R_M(\widetilde{h}) = \mathbf{P}(X_1 \in (-M,M))^{-1}\mathbf{E}e^{hX_1}I_{X_1\in(-M,M)} \to \mathbf{E}e^{hX_1} = R(h),\ M \to \infty$$

  по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Следовательно, $\inf R_M(h) \leq \inf R(h) + \varepsilon$ откуда и следует требуемое.

- Пусть распределение сосредоточено на одной из полуосей (для удобства на положительной). Тогда $R(h)$ монотонно возрастает, а значит

  $$\Lambda(0) = -\ln\inf_{h\in\mathbb{R}} R(h) = -\ln\lim_{h\to-\infty} R(h) = -\ln\mathbf{P}(X_1 = 0).$$

  Но

  $$\mathbf{P}(S_n/n \in (-\delta,\delta)) \geq \mathbf{P}(X_1 = 0)^n,$$

  откуда вытекает требуемое.

□

В случае размерности $d > 1$ верна аналогичная теорема Крамера, которую мы докажем на следующей лекции, а пока подготовим для этого почву.

Рассмотрим н.о.р. случайные векторы $X_i \in \mathbb{R}^d$, $\vec{S}_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Положим

$$R(\vec{h}) = \mathbf{E}e^{(\vec{h},\vec{X})},\ \vec{h} \in \mathbb{R}^d,\ \Lambda(\vec{\theta}) = \sup_{\vec{h}}((\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h})),\ \vec{\theta} \in \mathbb{R}^d.$$

Лемма 5.1. а) $\ln R$ — выпуклая дифференцируемая функция, Λ — выпуклая функция роста.
б) Если $\vec{\theta} = grad \ln R(\vec{h})$, то $\Lambda(\theta) = (\vec{h},\vec{\theta}) - \ln R(\vec{h})$.

Доказательство. Доказательство пункта а) полностью повторяет доказательство для одномерного случая.
Часть б) будет доказана на следующей лекции. □