Спецкурс "Большие уклонения"

Шкляев А.В.

12 октября 2018 г.

Принцип больших уклонений

Лемма 2.1. 1) $\ln R$ выпукла, Λ выпуклая функция роста.
2) Если $D_R = \emptyset$, то $\Lambda(\theta) = 0$. Если $R(\widetilde{h}) < \infty$ при некотором $\widetilde{h} > 0$, то существует $\mu = \mathbf{E}X$ (возможно $\mu = -\infty$) и $\Lambda(\theta)$ при $\theta > \mu$ неубывает. Аналогично при $R(\widetilde{h}) > -\infty$ при некотором $\widetilde{h} < 0$, то существует $\mu = \mathbf{E}X$ (возможно $\mu = \infty$) и $\Lambda(\theta)$ при $\theta < \mu$ невозрастает. При этом $\Lambda(\mu) = 0$.
3) Во внутренних точках D_R $R(\cdot)$ дифференцируема и $R'(h) = \mathbf{E}X_1 e^{hX_1}$, $\Lambda'(\theta) = y$, где $\Lambda(\theta) = y\theta - \ln R(y)$.
Доказательство.
1) Надо доказать, что $\ln R(h_1t_1 + h_2t_2) \le \ln R(h_1)t_1 + \ln R(h_2)t_2$ при любых положительных $t_1 + t_2 = 1$.
Но
$$R(h_1t_1 + h_2t_2) = \mathbf{E}\left(e^{h_1X_1}\right)^{t_1}\left(e^{h_2X_1}\right)^{t_2} \le \left(\mathbf{E}e^{h_1X_1}\right)^{t_1}\left(\mathbf{E}e^{h_1X_1}\right)^{t_2}$$
в силу неравенства Гельдера. Аналогичное утверждение для $\Lambda(\theta)$ следует из неравнества
$$\sup_h(h\theta_1t_1 + h\theta_2t_2 - \ln R(h\theta_1t_1) - \ln R(h\theta_2t_2)) \le t_1\sup_h(h\theta_1 - \ln R(h\theta_1)) + t_2\sup_h(h\theta_2 - \ln R(h\theta_2)).$$
То, что Λ функция роста прямо следует из определения. Тогда
$$\Lambda(\widetilde{\theta}) = \sup_h(\widetilde{\theta}h - \ln R(h)) \le \widetilde{\theta}\,\widetilde{h} - \ln R(\widetilde{h}) + \varepsilon = \lim_{\theta\to\widetilde{\theta}}(\theta\widetilde{h} - \ln R(\widetilde{h})) + \varepsilon \le \lim_{\theta\to\widetilde{\theta}}\sup_h(\theta h - \ln R(h)) + \varepsilon.$$
Следовательно, $\Lambda(\widetilde{\theta}) \le \liminf_{\theta\to\widetilde{\theta}}\Lambda(\theta)$, что и т.д.
2) Пусть $X^+ = \max(X, 0)$. В силу неравенства Иенсена $\mathbf{E}\exp(hX^+) \ge \exp(h\mathbf{E}X^+)$, откуда вытекает неравенство
$$\mathbf{E}X^+ \le \frac{1}{h}\mathbf{E}\exp(hX^+) \le \frac{1}{h}(1 + \mathbf{E}\exp(hX^+)) < \infty,$$
откуда $\mathbf{E}X^+$ конечно. Аналогично доказывается то, что конечно $\mathbf{E}X^-$.

В силу неравенства $\mathbf{E}Xh \le \ln R(h)$. Отсюда несложно доказывается $\Lambda(\mu) = 0$, поскольку $\mu h - \ln R(h) \le 0$.

Докажем монотонность. Пусть μ конечно. Рассмотрим $\theta h - \ln R(h)$. При $\theta > \mu$ и $h < 0$ $h\theta - \ln R(h) \le h\mu - \ln R(h) \le 0$, т.е. супремум достигается на положительных h, откуда выражение под знаком sup в определении Λ монотонно возрастает по θ. Аналогично при $\theta < \mu$.
Пусть $\mu = -\infty$. Тогда $R(h) = \infty$ при $h < 0$, а значит супремум в $\Lambda(\theta)$ можно рассматривать при $h \ge 0$.
$$\Lambda(\theta_1) = \sup_{h\ge 0}(\theta_1 h - \ln R(h)) \le \sup_{h\ge 0}(\theta_2 h - \ln R(h))$$
при $\theta_1 \le \theta_2$, откуда Λ неубывает. Аналогично в противном случае. Отметим, что если μ не существует (ни конечного, ни бесконечного), то $R(h) = \infty$ при всех $h \ne 0$, откуда $\Lambda(\theta) = 0$.
3) Рассмотрим $h \in (0, h_1)$, где $R(h_1) < \infty$. Тогда
$$R'(h) = \lim_{\delta\to 0}\frac{R(h+\delta) - R(h)}{\delta} = \lim_{\delta\to 0}\mathbf{E}\left(\frac{e^{\delta X} - 1}{\delta}e^{hX}\right).$$
Заметим, что
$$|e^x - 1| = |xe^{\theta(x)x}| \le |x|e^{|x|},\ \theta(x) \in [0, 1]$$
в силу разложения в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Значит,
$$\left|\frac{e^{\delta X} - 1}{\delta}\right| \le |X|e^{|\delta||X|}.$$
Отсюда величины под знаком предела при любом $\varepsilon > 0$ мажорируются при $|\delta| < \varepsilon$
$$|X|e^{(h+\varepsilon)X}I_{X>0} + |X|e^{(h-\varepsilon)X}I_{X<0},$$
у которой конечное математическое ожидание. По теореме о мажорируемой сходимости
$$R'(h) = \mathbf{E}Xe^{hX}.$$

Теперь давайте покажем, что справедлива следующая теорема Крамера
Теорема 5.1. (Крамера) Пусть S_n — случайное блуждание с $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$ (это матожидание всегда существует, возможно являясь бесконечным). Тогда меры $\mathbf{P}(S_n/n \in \cdot)$ удовлетворяют ПБУ с $\Lambda(x) = \sup_h(hx - \ln R(h))$.

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа: 1) Докажем, что для любого замкнутого F
$$\limsup\frac{1}{n}\ln\mathbf{P}(S_n/n \in F) \le -\inf_{\theta\in F}\Lambda(\theta).$$

Если $D_R = \{0\}$, то утверждение очевидно в силу того, что $\ln \mathbf{P}(S_n \in F) \le 0$, а $\Lambda = 0$ в силу Леммы 5.2. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда найдется $x \in D_R$, $x \ne 0$. При этом существует μ (возможно бесконечное).
Кроме того, если $\inf_{\theta \in F} \Lambda(\theta) = I_F = 0$, то утверждение очевидно. Поэтому рассмотрим случай $I_F > 0$.
Если $\mu = -\infty$, то функция Λ в силу Леммы 5.2 возрастает на всей прямой. При этом

$$\mathbf{P}(X_1 \ge x) \le \inf_{h \ge 0} \mathbf{E} e^{h(X_1 - x)} = \inf_h e^{-(hx - \ln R(h))} = e^{-\Lambda(x)},$$

т.е. $\Lambda(x) \to 0$, $x \to \infty$. А раз $I_F > 0$, то $\inf F = a > -\infty$.
Остается заметить, что тогда

$$\mathbf{P}(S_n/n \in F) \le \mathbf{P}(S_n \ge an) \le \inf_h \exp(-(ah - \ln R(h))n) = \exp(-\Lambda(a)n),$$

что и требовалось доказать. Аналогично рассматривается $\mu = \infty$.
И, наконец, если μ конечно, то F не должно содержать μ (иначе $I_F = 0$, т.к. $\Lambda(\mu) = 0$). Значит в силу замкнутости, $\inf\{x > \mu, x \in F\} = x^+ > \mu$, $\sup\{x < \mu, x \in F\} = x^- < \mu$. Отсюда

$$\mathbf{P}(S_n/n \in F) \le \mathbf{P}(S_n \ge x^+ n) + \mathbf{P}(S_n \le x^- n) \le \exp(-\Lambda(x^+)n) + \exp(-\Lambda(x^-)n) \le 2\exp(-I_F n),$$

откуда прямо следует верхняя граница.
2) Докажем нижний принцип больших уклонений: для всех открытых G

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in G) \ge - \inf_{x \in G} \Lambda(x). \tag{1}$$

Покажем, что достаточно доказать что при любых $\delta > 0$, $x \in G$

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(x)) \ge -\Lambda(x). \tag{2}$$

Действительно, если $I = \inf_{x \in G} \Lambda(x)$, то при любом ε найдется $y \in G : \Lambda(y) \le I + \varepsilon$. При этом при некотором $\delta > 0$ справедливо соотношение $U_\delta(y) \in G$. Тогда из (2) следует, что

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in G) \ge \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(S_n/n \in U_\delta(y)) \ge -\Lambda(y) \ge -I - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε, имеем (1). $\square$

Остальную часть доказательства рассмотрим на следующей лекции.