Итак, мы с вами собрались доказывать теорему Петрова-Бахадура-Рао. Начнем с решетчатого случая.

Теорема 1. *Пусть* X_i *— н.о.р.,* $R(h) = \mathbf{E}e^{hX}$.

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)\left(1 - e^{dh_\theta}\right)} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)n\right),$$

равномерно по $\theta n \in an + k\mathbb{Z}$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2] \subset (\mu, m^+)$

Теорема 2. *Пусть* X_i *— н.о.р. решетчатые случайные величины с математическим ожиданием* $\mathbf{E}X = \mu$ *и дисперсией* $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$ *с решеткой* $a + kd$, $k \in \mathbb{Z}$, *где* d *— максимально возможное,* $R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty$ *при* $h \in [0, h^+)$, $h^+ > 0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n = k) \sim \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)n\right)$$

равномерно по $k \in an + d\mathbb{Z}$, $k/n \in [0, m^+)$, *причем* $o(1)$ *равномерно мало по* $k \in [0, \theta_1]$ *при любом* $\theta_1 \in [0, m^+)$.

Здесь как и прежде

$$m(h) = (\ln R(h))',\ \sigma^2(h) = m'(h),\ h_\theta : m(h_\theta) = \theta,\ m^+ = \lim_{h \to h^+} m(h),\ \Lambda(\theta) = \theta h_\theta - \ln R(h_\theta).$$

Доказательство Теоремы 2. Докажем эту теорему, пользуясь теоремой Гнеденко:

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left(-\frac{(k - \mu n)^2}{2\sigma^2 n}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

При любом h можно перейти к сопряженному распределению:

$$\mathbf{P}(S_n = k) = e^{-hk} R(h)^n \mathbf{P}(S_n^{(h)} = k).$$

Выберем h так, что $\mathbf{E}X_1^{(h)} = m(h) = k/n$ (по определению нужно взять $h = h_{k/n}$). Тогда

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} = k) = \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

поскольку $k - n\mathbf{E}X_1^{(h)} = 0$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right)n\right)$$

При этом здесь есть тонкий момент — мы применяли теорему Гнеденко для $X_i^{(h)}$, где h зависит от n, хотя сама теорема формулируется в условиях фиксированного распределения величин. Однако, это можно делать, если в теореме Гнеденко показать, что

$$\mathbf{P}(S_n^{(h)} = k) = \frac{d(1 + o(1))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h)} \exp\left(-\frac{(k - m(h)n)^2}{2\sigma^2(h)n}\right)$$

выполнено равномерно по $h \in [0, h_{\theta_1}]$ при $|k - m(h)n| \leq c\sqrt{n}$, где c — фиксированно. Оказывается, что при доказательстве теоремы Гнеденко это можно сделать. В этом курсе мы опустим этот вопрос, оставив его для курса дополнительных глав теории вероятностей. $\square$

Доказательство Теоремы 1. Как и прежде из локальной теоремы следует интегральная. Действительно, в силу локальной теоремы

$$\mathbf{P}(S_n \in [\theta n, \theta n + \sqrt[3]{n}]) = (1+o(1)) \sum_{k=\theta n}^{\theta n + \sqrt[3]{n}} \frac{d}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right) n\right).$$

При этом $\sigma(h_{k/n}) \to \sigma(h_\theta)$, поскольку σ и $h.$ непрерывны, а $k/n \to \theta$,

$$\Lambda\left(\frac{k}{n}\right) n = \Lambda\left(\theta + \frac{k-\theta n}{n}\right) n = \Lambda(\theta) n + (k-\theta n)\Lambda'(\theta) + O\left(\left(\frac{(k-\theta n)^2}{n}\right)^2 n\right),$$

где последняя величина есть $o(1)$ для рассматриваемых k. Следовательно,

$$\mathbf{P}(S_n \in [\theta n, \theta n + \sqrt[3]{n}]) = \frac{d(1+o(1))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)} e^{-\Lambda(\theta) n} \sum_{k=\theta n}^{\theta n + \sqrt[3]{n}} e^{-h_\theta(k-\theta n)} = \frac{d(1+o(1))}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_\theta)\left(1-e^{-dh_\theta}\right)} e^{-\Lambda(\theta) n}.$$

Остается заметить, что

$$\mathbf{P}(S_n \geq \theta n + \sqrt[3]{n}) \leq R(h_\theta)^n e^{-h_\theta(\theta n + \sqrt[3]{n})} = e^{-\Lambda(\theta) n} e^{-h_\theta \sqrt[3]{n}} = o(1) \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-\Lambda(\theta) n}.$$

$\square$

Теорема 3. *Пусть $k/n \to \theta \in [\mu, m^+)$, $n \to \infty$. Тогда*

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, ..., X_l \in A_l | S_n = k) \to \mathbf{P}\left(X_1^{(h_\theta)} \in A_1\right) ... \mathbf{P}\left(X_l^{(h_\theta)} \in A_l\right).$$

Эту теорему также называют теоремой Бартфаи. Иначе говоря, если мы за время n достигли уровня $k \sim \theta n$, то каждый шаг вел себя как шаг сопряженного распределения с шагом $X_1^{(h_\theta)}$. Таким образом, чтобы дойти до высокого уровня, нужно сделать вид, что каждый шаг имеет распределение не X_i, а $X_i^{(h_\theta)}$.

Доказательство Теоремы 3. Докажем для ограниченных множеств A_1,...,A_k. Тогда доказательство для всех остальных будет вытекать из того, что все меры вероятностные (более подробно этот вопрос будет разобран в курсе дополнительных глав). Тогда

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, ..., X_l \in A_l, S_n = k) = \sum_{i_1 \in A_1, ..., i_l \in A_l} \mathbf{P}(S_{n-l} = k - i_1 ... - i_l) \mathbf{P}(X_1 = i_1) ... \mathbf{P}(X_l = i_l).$$

При этом

$$\mathbf{P}(S_{n-l} = k - i_1 ... - i_l) = e^{-h_{k/n}(k - i_1 - ... - i_l)} \mathbf{P}\left(S_{n-l}^{(h_{k/n})} = k - i_1 ... - i_l\right) R(h_{k/n})^{n-l} \sim$$
$$\exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right) n\right) e^{h_{k/n}(i_1 + ... + i_l)} R(h_{k/n})^{-l} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \exp\left(-\frac{(i_1 + ... + i_l - lk/n)^2}{2(n-l)\sigma(h_{k/n})^2}\right), \qquad (1)$$

где в последнем соотношении мы воспользовались теоремой Гнеденко. Последний множитель в (1) есть $(1+o(1))$, откуда получаем

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, ..., X_l \in A_l, S_n = k) \sim \frac{\exp\left(-\Lambda\left(\frac{k}{n}\right) n\right)}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{k/n})} \sum_{i_1 \in A_1, ..., i_l \in A_l} e^{h_{k/n}(i_1 + ... + i_l)} R(h_{k/n})^{-l} \mathbf{P}(X_1 = i_1) ... \mathbf{P}(X_l = i_l).$$

Величина в левой части полученного соотношения эквивалентна $\mathbf{P}(S_n = k)$, сумма в правой части есть

$$\mathbf{P}\left(X_1^{(h_{k/n})} = i_1\right) \dots \mathbf{P}\left(X_l^{(h_{k/n})} = i_l\right).$$

Теорема доказана. $\square$

А можно ли получить аналогичные результаты для нерешетчатого случая? В этом случае можно формулировать результаты в терминах интегро-локальных теорем:

Теорема 4. *Пусть X_i — н.о.р. случайные величины с математическим ожиданием $\mathbf{E}X = \mu$ и дисперсией $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$, имеющие нерешетчатое распределение. Тогда при всех Δ_n достаточно медленно стремящихся к 0 справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\left(S_n \in [x, x + \Delta_n)\right) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu n)^2}{2n\sigma^2}}.$$

при всех $x - \mu n = O(\sqrt{n})$, причем равномерно по $x - \mu n \in [-t\sqrt{n}, t\sqrt{n}]$ при любом $t > 0$.

Что это за результат и как его использовать. Убедимся, что из него следует ЦПТ:

$$\mathbf{P}\left(S_n \in [\mu n + \sigma t_1\sqrt{n}, \mu n + \sigma t_2\sqrt{n}]\right) \to \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$$

при $n \to \infty$. Эта теорема позволяет оценивать вероятности попадания в отрезки длины $\sqrt{n}$. Заметим, что этот результат есть следствие Теоремы 4:

$$\mathbf{P}\left(S_n \in [\mu n + t_1\sigma\sqrt{n}, \mu n + t_2\sigma\sqrt{n}]\right) = \sum_{k=1}^{[(t_2-t_1)\sqrt{n}/\Delta_n]} \mathbf{P}\left(S_n \in [\mu + t_1\sigma\sqrt{n} + k\Delta_n, \mu + t_1\sigma\sqrt{n} + (k+1)\Delta_n)\right) +$$

$$o(n^{-1/2}) = (1 + o(1)) \sum_{k=1}^{[(t_2-t_1)\sqrt{n}/\Delta_n]} \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma} e^{-\frac{(t_1\sqrt{n}+k\Delta_n)^2}{2n}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2/2} dt = \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где в первом переходе $o(n^{-1/2})$ возникло из-за того, что $(t_2 - t_1)\sqrt{n}$ может не делиться нацело на Δ_n, во втором переходе мы воспользовались Теоремой 1 (в частности, указанной в ней равномерностью сходимости), а в третьем тем, что представленная сумма является интегральной с шагом $\Delta_n n^{-1/2}$.
На этих рассуждениях мы видим, что интегролокальные теоремы позволяют нам оценивать вероятности попадания суммы как в отрезки длины порядка $\sqrt{n}$, так и в отрезки длины $O(1)$ и даже некоторые отрезки длины $o(1)$.

Из этой теоремы аналогично тому, как это делается в решетчатом случае, можно получить интегро-локальную теорему о больших уклонений.

Теорема 5. *Пусть X_i — н.о.р. нерешетчатые случайные величины с математическим ожиданием $\mathbf{E}X = \mu$ и дисперсией $\mathbf{D}X = \sigma^2 > 0$, $R(h) = \mathbf{E}e^{hX} < \infty$ при $h \in [0, h^+)$, $h^+ > 0$. Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta_n)) \sim \frac{\Delta_n}{\sqrt{2\pi n}\sigma(h_{x/n})} \exp\left(-\Lambda\left(\frac{x}{n}\right)n\right).$$

Из этой теоремы аналогично тому, как это было в решетчатом случае, следует теорема Петрова для нерешетчатых величин.