Лекция 3

Локальная теорема восстановления

Определение 1. Распределение дискретной случайной величины называется *арифметическим*, если носитель этого распределения (т.е. множество возможных значений этой случайной величины) принадлежит решетке $\{0, \pm d, \pm 2d, \ldots\}$, где $d > 0$. Величина d называется *шагом* распределения. Если у распределения несколько различных шагов, то наибольший из них называется *максимальным шагом* распределения.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные *положительные* случайные величины, имеющие арифметическое распределение с максимальным шагом d. Рассмотрим случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Возможные значения случайных величин $S_1, S_2, \ldots$ принадлежат множеству $d \cdot \mathbb{N}$. Положим

$$u_0 = 1, \qquad u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n = k\right), \quad k \in d \cdot \mathbb{N}.$$

Заметим, что $u_k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n = k\right)$ при $k \in d \cdot \mathbb{N}_0$. Величина u_k при $k \in d \cdot \mathbb{N}$ представляет собою вероятность того, что случайное блуждание $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ окажется когда-нибудь в состоянии k.

Теорема 1. *Если распределение положительной случайной величины X_1 является арифметическим с максимальным шагом d и $\mathbf{E}X_1 = a \in (0, +\infty]$, то*

$$\lim_{k\to\infty\ (k \in d\cdot\mathbb{N})} u_k = \frac{d}{a}.$$

Замечание 1. Введем процесс восстановления

$$\nu\left(0\right) = 0, \qquad \nu\left(t\right) = \max\left\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \leq t\right\}, \quad t > 0.$$

Пусть $U\left(t\right)$, $t \geq 0$, – функция восстановления. Тогда при $k \in d \cdot \mathbb{N}$

$$U\left(k\right) - U\left(k-d\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n \in (k-d, k]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n \in k\right) = u_k,$$

причем u_k представляет собою вероятность того, что момент времени k является моментом восстановления. Асимптотическое поведение функции $U\left(t\right)$ при $t \to \infty$ описывается интегральной теоремой восстановления. Теорема 1 описывает асимптотическое поведение приращения функции $U\left(t\right)$ при $t \to \infty$ и поэтому называется *локальной теоремой восстановления* или *теоремой Блэкуэлла*.

Сначала установим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если утверждение теоремы* 1 *справедливо, когда распределение* X_1 *является арифметическим с максимальным шагом* 1, *то оно справедливо и в случае произвольного максимального шага* d.

Доказательство. Положим $\widetilde{X}_i = X_i/d$ при $i \in \mathbb{N}$ (ясно, что случайная величина $\widetilde{X}_1$ имеет арифметическое распределение с максимальным шагом 1). Введем соответствующие моменты восстановления $\widetilde{S}_n$ при $n \in \mathbb{N}_0$ и функцию $\widetilde{u}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что

$$\lim_{k\to\infty\ (k\in\mathbb{N})} \widetilde{u}_k = \frac{1}{\widetilde{a}}, \tag{1}$$

где $\widetilde{a} = \mathbf{E}\widetilde{X}_1 = a/d$. Заметим, что при $k \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{u}_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_n = k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n = kd\right) = u_{kd}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\lim_{k\to\infty\ (k\in\mathbb{N})} u_{kd} = \lim_{k\to\infty\ (k\in d\cdot\mathbb{N})} u_k = \frac{d}{a}.$$

Лемма доказана.

Далее рассматриваем только случай $d = 1$. Это означает, что возможные значения случайной величины X_1 принадлежат множеству $\mathbb{N}$, т.е. случайная величина X_1 является целочисленной и

$$u_0 = 1, \qquad u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(S_n = k\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть D – носитель распределения случайной величины X_1 (т.е. множество ее возможных значений). Поскольку $d = 1$ – максимальный шаг распределения случайной величины X_1, то

$$\text{НОД}\,(D) = 1.$$

Положим $f_k = \mathbf{P}\left(X_1 = k\right)$ при $k \in \mathbb{N}$ и $r_k = \sum_{l=k+1}^{\infty} f_l = \mathbf{P}\left(X_1 > k\right)$ при $k \in \mathbb{N}_0$. Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = 1, \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k = \sum_{k=1}^{\infty} k f_k = \mathbf{E}X_1 = a. \tag{4}$$

Следующее утверждение является основополагающим, причем соотношение (5) называется *уравнением восстановления.*

Лемма 2. *При* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо тождество*

$$u_k = \sum_{l=1}^{k} f_l u_{k-l}. \tag{5}$$

Доказательство. Заметим, что при $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(S_n = k\right) = \sum_{l=1}^{k} \mathbf{P}\left(S_1 = l,\ S_n - S_1 = k - l\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \mathbf{P}\left(S_1 = l\right) \mathbf{P}\left(S_n - S_1 = k - l\right) = \sum_{l=1}^{k} f_l \mathbf{P}\left(S_{n-1} = k - l\right),$$

откуда суммированием по $n \in \mathbb{N}$ получаем утверждение леммы.

Рассмотрим следствие уравнения восстановления.

Лемма 3. *При $k \in \mathbb{N}$ справедливо тождество*

$$\sum_{l=0}^{k} r_l u_{k-l} = 1.$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что

$$u_k = \sum_{l=1}^{k} f_l u_{k-l} = \sum_{l=1}^{k} \left(r_{l-1} - r_l\right) u_{k-l} = \sum_{l=1}^{k} r_{l-1} u_{k-l} - \sum_{l=1}^{k} r_l u_{k-l}.$$

Откуда, учитывая, что $u_k = r_0 u_k$ (т.к. $r_0 = 1$), находим, что

$$0 = \sum_{l=1}^{k} r_{l-1} u_{k-l} - \left(\sum_{l=1}^{k} r_l u_{k-l} + r_0 u_k\right) = \sum_{l=0}^{k-1} r_l u_{k-1-l} - \sum_{l=0}^{k} r_l u_{k-l}.$$

Следовательно,

$$\sum_{l=0}^{k} r_l u_{k-l} = \sum_{l=0}^{k-1} r_l u_{k-1-l} = \sum_{l=0}^{k-2} r_l u_{k-2-l} = \ldots = r_0 u_0 = 1.$$

Лемма доказана.

Лемма 4 (о потолочном значении). *Пусть неотрицательные и ограниченные сверху (например, единицей) последовательности*

$$\{v_m,\ m \in \mathbb{N}\},\ \left\{v_m^{(1)},\ m \in \mathbb{N}\right\},\ \left\{v_m^{(2)},\ m \in \mathbb{N}\right\},\ \ldots$$

связаны при каждом $m \in \mathbb{N}$ соотношением

$$v_m = \sum_{l=1}^{+\infty} f_l v_m^{(l)}. \tag{6}$$

Пусть для каждого $j \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{m \to \infty} v_m^{(j)} \leq \mu. \tag{7}$$

Если $\lim_{m\to\infty} v_m = \mu$, *то для каждого такого* $j \in \mathbb{N}$, *что* $f_j > 0$, *выполняется равенство*

$$\lim_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \mu. \tag{8}$$

Доказательство. Предположим противное: $f_j > 0$ при некотором $j \in \mathbb{N}$, но соотношение (8) не выполняется. Положим

$$\liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \mu'. \tag{9}$$

Из (7) и (9) следует, что $\mu' \le \mu$. Отметим, что равенство $\mu' = \mu$ невозможно, поскольку в этом случае (см. (7) и (9))

$$\mu = \mu' = \liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} \le \limsup_{m\to\infty} v_m^{(j)} \le \mu,$$

т.е.

$$\liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \limsup_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \mu,$$

что означает справедливость соотношения (8), а это невозможно в силу сделанного выше предположения. Итак,

$$\liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} = \mu' < \mu. \tag{10}$$

Зафиксируем такое натуральное N, что $N > j$. Тогда ввиду (6) и ограниченности последовательностей $\left\{v_m^{(1)}\right\}$, $\left\{v_m^{(2)}\right\}$ и т.д. находим, что при $m > N$

$$v_m \le \sum_{l=1}^{N} f_l v_m^{(l)} + \sum_{l=N+1}^{\infty} f_l.$$

Следовательно,

$$\liminf_{m\to\infty} v_m \le \liminf_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{N} f_l v_m^{(l)} + \sum_{l=N+1}^{\infty} f_l. \tag{11}$$

Если $a_n = b_n + c_n$, то, как известно, $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n + \liminf_{n\to\infty} c_n$. Поэтому, учитывая соотношения (7) и (10), находим, что

$$\liminf_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{N} f_l v_m^{(l)} \le \limsup_{m\to\infty} \sum_{l\in\{1,\dots,N\}\setminus\{j\}} f_l v_m^{(l)} + f_j \liminf_{m\to\infty} v_m^{(j)} \le$$

$$\le \mu \sum_{l\in\{1,\dots,N\}\setminus\{j\}} f_l + \mu' f_j \le \mu \sum_{l\in\mathbb{N}\setminus\{j\}} f_l + \mu' f_j.$$

Из (3) вытекает, что $\mu \sum_{l\in\mathbb{N}\setminus\{j\}} f_l + \mu' f_j < \mu$, поэтому $\mu \sum_{l\in\mathbb{N}\setminus\{j\}} f_l + \mu' f_j = \theta\mu$ при некотором $\theta \in (0,1)$, не зависящем от N. Следовательно,

$$\liminf_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{N} f_l v_m^{(l)} \le \theta\mu. \tag{12}$$

Из (11) и (12), находим, что

$$\liminf_{m\to\infty} v_m \le \theta\mu + \sum_{l=N+1}^{\infty} f_l.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая, что $\lim_{N\to\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty} f_l = 0$ (см. (3)), получаем, что

$$\liminf_{m\to\infty} v_m \le \theta\mu < \mu.$$

Но это противоречит тому, что $\lim_{m\to\infty} v_m = \mu$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Для простоты изложения предположим, что $f_j > 0$ при каждом $j \in \mathbb{N}$. Заметим, что $0 \le u_k \le 1$ при $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$\mu = \limsup_{k\to\infty} u_k, \qquad \nu = \liminf_{k\to\infty} u_k.$$

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что

$$\mu \le a^{-1}, \tag{13}$$

$$\nu \ge a^{-1}. \tag{14}$$

Сначала докажем соотношение (13).

По определению μ у последовательности $u_1, u_2, \ldots$ существует такая подпоследовательность $\{u_{k_m},\ m \in \mathbb{N}\}$, что

$$\lim_{m\to\infty} u_{k_m} = \mu. \tag{15}$$

Покажем, что при каждом $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} u_{k_m - l} = \mu. \tag{16}$$

Действительно, положим

$$v_m = u_{k_m}; \qquad v_m^{(l)} = u_{k_m - l} \text{ при } 1 \le l \le k_m; \qquad v_m^{(l)} = 0 \text{ при } l > k_m.$$

Тогда из соотношения (5) следует, что

$$v_m = \sum_{l=1}^{+\infty} f_l v_m^{(l)},$$

т.е выполнено соотношение (6). Выполнены и остальные условия леммы о потолочном значении, поэтому при каждом $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} v_m^{(l)} = \mu,$$

а это и означает справедливость соотношения (16).

Завершим доказательство соотношения (13). По лемме 3

$$\sum_{l=0}^{k_m} r_l u_{k_m - l} = 1.$$

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. При $k_m \geq N$

$$\sum_{l=0}^{N} r_l u_{k_m - l} \leq 1.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и применяя (16), находим, что

$$\mu \sum_{l=0}^{N} r_l \leq 1.$$

Переходя теперь к пределу при $N \to \infty$ и учитывая (4), получаем, что

$$\mu \sum_{l=0}^{\infty} r_l = \mu a \leq 1,$$

откуда вытекает требуемое соотношение (13).

Теперь докажем соотношение (14). У последовательности $u_1, u_2, \ldots$ существует такая подпоследовательность $\{u_{k_m},\ m \in \mathbb{N}\}$, что

$$\lim_{m\to\infty} u_{k_m} = \nu. \tag{17}$$

Аналогично соотношению (16) можно показать, что при каждом $l \in \mathbb{N}$

$$\lim_{m\to\infty} u_{k_m - l} = \nu. \tag{18}$$

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$. По лемме 3 при $k_m > N$,

$$\sum_{l=0}^{N} r_l u_{k_m - l} + \sum_{l=N+1}^{k_m} r_l \geq 1.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и учитывая соотношение (18), находим, что

$$\nu \sum_{l=0}^{N} r_l + \sum_{l=N+1}^{\infty} r_l \geq 1.$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ и учитывая, что $\lim_{N\to\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} r_l = 0$ (см. (4)), получаем, что

$$\nu \sum_{l=0}^{\infty} r_l = \nu a \geq 1,$$

откуда следует требуемое соотношение (14). Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В обшем случае рассуждения немного усложнятся. Поскольку распределение случайной величины X_1 является арифметическим с максимальным шагом 1, то НОД$\{j \in \mathbb{N} : f_j > 0\} = 1$. Следовательно, существуют такие числа $j_1, j_2, \ldots, j_r \in \mathbb{N}$, что $f_{j_1}, f_{j_2}, \ldots, f_{j_r}$ положительны и НОД$\{j_1, j_2, \ldots, j_r\} = 1$. Если соотношение (15) справедливо, то можно показать (см. доказательство соотношения (16)), что для произвольных натуральных чисел $l_1, l_2, \ldots, l_r$

$$\mu = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - j_1} = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - 2j_1} = \ldots = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1}$$

и, следовательно,

$$\mu = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1 - j_2} = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1 - 2j_2} = \ldots = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1 - l_2 j_2}$$

и т.д.,

$$\mu = \lim_{m\to\infty} u_{k_m - l_1 j_1 - l_2 j_2 - \ldots - l_r j_r}.$$

Нетрудно показать, что все достаточно большие натуральные числа могут быть представлены в виде $l_1 j_1 + l_2 j_2 + \ldots + l_r j_r$ при соответствующем подборе натуральных чисел $l_1, l_2, \ldots, l_r$. Таким образом, $\lim_{m\to\infty} u_{k_m - l} = \mu$ при всех l, превосходящих некоторое число $L \in \mathbb{N}$. Положим $p_m = k_m - L$, тогда при всех натуральных l

$$\lim_{m\to\infty} u_{p_m - l} = \mu.$$

Теперь надо повторить доказательство теоремы 1, начиная со слов “Завершим доказательство соотношения (13)”. При этом вместо k_m надо рассматривать p_m.