Лекция 2

Процессы восстановления

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных *положительных* случайных величин и $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Напомним, что *процессом восстановления* называется случайный процесс $\{\nu(t)\,,\ t \geq 0\}$, определяемый равенствами

$$\nu(0) = 0, \qquad \nu(t) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n \leq t\}\,, \quad t > 0.$$

В некотором смысле процесс восстановления $\{\nu(t)\}$ является обратным к случайному блужданию $\{S_n\}$ (напомним, что величины $S_1, S_2, \ldots$ называют *первым*, *вторым* и т.д. *моментами восстановления*).

Процессы восстановления находят применение при изучении случайных явлений, которым свойственна цикличность, носящая случайный характер (продолжительности циклов равны $X_1, X_2, \ldots$, отсюда следует положительность этих величин).

Положим $a = \mathbf{E}X_1$. Ясно, что $a > 0$. Установим сначала закон больших чисел и центральную предельную теорему для процесса восстановления.

Предварительно напомним основные определения из курса теории вероятностей, касающиеся сходимости случайных величин. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, заданных на одном вероятностном пространстве, *сходится по вероятности* при $n \to \infty$ к случайной величине ξ (короткая запись: $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$), если $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\right) = 0$ для произвольного $\varepsilon > 0$.

Пусть при каждом $n \in \mathbb{N}$ задана случайная величина ξ_n на вероятностном пространстве $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbf{P}_n)$, а случайная величина ξ задана на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ *сходится по распределению* при $n \to \infty$ к случайной величине ξ (короткая запись: $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$), если $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}_n f(\xi_n) = \mathbf{E} f(\xi)$ для произвольной ограниченной и непрерывной числовой функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (здесь $\mathbf{E}_n$ – символ математического ожидания, соответствующий мере $\mathbf{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, а $\mathbf{E}$ – символ математического ожидания, соответствующий мере $\mathbf{P}$).

Пусть $F_n(\cdot)$ – функция распределения случайной величины ξ_n, а $F(\cdot)$ – функция распределения случайной величины ξ. Как известно, сходимость по распределению равносильна *сходимости функций распределения в основном*: $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ в точках непрерывности функции $F(\cdot)$.

Отметим, что указанные виды сходимости и соответствующие утверждения имеют место и для случайных векторов.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = a < +\infty$, *тогда при* $t \to \infty$

$$\frac{\nu(t)}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{a}.$$

Доказательство. Заметим, что при $t > 0$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\{\nu(t) \geq k\} = \{S_k \leq t\}. \tag{1}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\left(\frac{\nu(t)}{t} - \frac{1}{a} \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\nu(t) \geq t\left(\frac{1}{a} + \varepsilon\right)\right) = \mathbf{P}(\nu(t) \geq k(t)),$$

где $k(t) = \lceil t(1/a + \varepsilon) \rceil$ (по определению $\lceil x \rceil = x$, если $x \in \mathbb{Z}$, и $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ для остальных $x \in \mathbb{R}$). Следовательно, учитывая (1), находим

$$\mathbf{P}\left(\frac{\nu(t)}{t} - \frac{1}{a} \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(S_{k(t)} \leq t\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_{k(t)}}{k(t)} \leq a - \left(a - \frac{t}{k(t)}\right)\right).$$

Теперь заметим, что

$$a - \frac{t}{k(t)} \geq a - \frac{t}{t(1/a + \varepsilon)} = a - \frac{a}{1 + a\varepsilon} = \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon} =: \varepsilon_1.$$

Итак,

$$\mathbf{P}\left(\frac{\nu(t)}{t} - \frac{1}{a} \geq \varepsilon\right) \leq \mathbf{P}\left(\frac{S_{k(t)}}{k(t)} \leq a - \varepsilon_1\right). \tag{2}$$

По закону больших чисел (для случайного блуждания) при $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} a.$$

Следовательно, при фиксированном $\varepsilon_1 > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon_1\right) = 0$$

и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq a - \varepsilon_1\right) = 0. \tag{3}$$

Поскольку $k(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, то из соотношений (2) и (3) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu(t)}{t} - \frac{1}{a} \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Аналогично показывается, что

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu(t)}{t} - \frac{1}{a} \leq -\varepsilon\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{\nu(t)}{t} - \frac{1}{a}\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

что равносильно утверждению доказываемой теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = a < +\infty$ *и* $\mathbf{D}X_1 = \sigma^2$, $0 < \sigma^2 < +\infty$. *Тогда при* $t \to \infty$

$$\frac{\nu(t) - t/a}{\sigma\sqrt{t/a^3}} \xrightarrow{D} N,$$

где $N \sim N(0,1)$.

Доказательство. Очевидно, что для произвольного $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}\left(\frac{\nu(t) - t/a}{\sigma\sqrt{t/a^3}} \geq x\right) = \mathbf{P}\left(\nu(t) \geq \frac{t}{a} + x\sigma\sqrt{\frac{t}{a^3}}\right) = \mathbf{P}(\nu(t) \geq k(t)),$$

где $k(t) = \left\lceil t/a + x\sigma\sqrt{t/a^3}\right\rceil$. Ввиду соотношения (1)

$$\mathbf{P}(\nu(t) \geq k(t)) = \mathbf{P}\left(S_{k(t)} \leq t\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_{k(t)} - k(t)\,a}{\sigma\sqrt{k(t)}} \leq \frac{t - k(t)\,a}{\sigma\sqrt{k(t)}}\right).$$

Итак,

$$\mathbf{P}\left(\frac{\nu(t) - t/a}{\sigma\sqrt{t/a^3}} \geq x\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_{k(t)} - k(t)\,a}{\sigma\sqrt{k(t)}} \leq \frac{t - k(t)\,a}{\sigma\sqrt{k(t)}}\right). \tag{4}$$

Заметим, что $k(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t - k(t)\,a}{\sigma\sqrt{k(t)}} = -\lim_{t\to\infty} \frac{ax\sigma\sqrt{t/a^3}}{\sigma\sqrt{t/a}} = -x. \tag{5}$$

По центральной предельной теореме (для случайного блуждания) при $n \to \infty$

$$\frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N.$$

Но сходимость по распределению равносильна сходимости функций распределения в основном: для произвольного $u \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} \leq u\right) = \Phi(u),$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения случайной величины N (называемая также *функцией Лапласа*), т.е.

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{u} e^{-v^2/2} dv, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Следовательно (см. (5)),

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{S_{k(t)} - k(t)\,a}{\sigma\sqrt{k(t)}} \leq \frac{t - k(t)\,a}{\sigma\sqrt{k(t)}}\right) = \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Таким образом (см. (4)),

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{\nu(t) - t/a}{\sigma\sqrt{t/a^3}} \geq x\right) = 1 - \Phi(x),$$

что равносильно утверждению доказываемой теоремы.

При решении многих задач теории восстановления полезной оказывается *функция восстановления* $U(t)$, $t \geq 0$, определяемая равенствами

$$U(0) = 1, \quad U(t) = 1 + \mathbf{E}\nu(t), \quad t > 0.$$

Заметим, что если $\{\nu(t), t \geq 0\}$ – процесс Пуассона с интенсивностью λ, то $U(t) = 1 + \lambda t$ при $t \geq 0$, поскольку $\nu(t) \sim \Pi_{\lambda t}$.

При $t \geq 0$ справедливо равенство

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \leq t). \tag{6}$$

Действительно,

$$\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I(S_n \leq t),$$

где $I(A)$ – индикатор случайного события A, поэтому

$$U(t) = 1 + \mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} I(S_n \leq t)\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \leq t).$$

Положим при $t > 0$

$$\tau(t) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : S_n > t\},$$

т.е. $\tau(t)$ – момент первого достижения полуоси (t, ∞) случайным блужданием $\{S_n\}$. Заметим, что при $t > 0$

$$\tau(t) = \nu(t) + 1 \tag{7}$$

и, следовательно,

$$U(t) = \mathbf{E}\tau(t). \tag{8}$$

При $a < +\infty$ справедливо *тождество Вальда*: при $t > 0$

$$\mathbf{E}S_{\tau(t)} = a\mathbf{E}\tau(t) = aU(t).$$

Действительно, положим $\beta_n = I(\tau(t) \geq n) = I(\nu(t) \geq n-1) = I(S_{n-1} \leq t)$ при $n \in \mathbb{N}$ (см. (1)). Тогда

$$S_{\tau(t)} = \sum_{n=1}^{\tau(t)} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \beta_n,$$

причем при $n \in \mathbb{N}$ случайные величины X_n и β_n – независимые. Следовательно,

$$\mathbf{E}S_{\tau(t)} = \mathbf{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n \beta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_n \beta_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}X_n \cdot \mathbf{E}\beta_n = a\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(S_{n-1} \leq t) = a\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n \leq t) = aU(t)$$

(последнее равенство объясняется соотношением (6)). Вспоминая (8), получаем требуемое тождество.

Установим так называемую *интегральную теорему восстановления.*

Теорема 3. *При* $a < +\infty$ *справедливо равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{a}.$$

Доказательство. Заметим, что $S_{\tau(t)} > t$ при $t > 0$, откуда на основании тождества Вальда находим, что

$$U(t) > \frac{t}{a}. \tag{9}$$

Зафиксируем $c > 0$. Введем при $n \in \mathbb{N}$ случайные величины $X_n^{(c)} = X_n \wedge c$ и положим $a^{(c)} = \mathbf{E}X_1^{(c)}$. Пусть $\left\{S_n^{(c)}\right\}$ – случайное блуждание, построенное по последовательности $\left\{X_n^{(c)},\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Пусть $\left\{\nu^{(c)}(t)\right\}$ и $U^{(c)}(\cdot)$ – соответствующие этому блужданию процесс и функция восстановления. Ясно, что $S^{(c)}_{\nu^{(c)}(t)+1} = S^{(c)}_{\nu^{(c)}(t)} + X^{(c)}_{\nu^{(c)}(t)+1} \le t+c$, поэтому из тождества Вальда находим, что

$$U^{(c)}(t) \le \frac{t+c}{a^{(c)}}. \tag{10}$$

Далее, поскольку $X_n^{(c)} \le X_n$ при $n \in \mathbb{N}$, то $\nu^{(c)}(t) \ge \nu(t)$ при $t > 0$ и, следовательно, $U^{(c)}(t) \ge U(t)$. Откуда, учитывая (10), получаем, что

$$U(t) \le \frac{t+c}{a^{(c)}}. \tag{11}$$

Из соотношений (9) и (11) следует, что

$$\frac{1}{a} \le \liminf_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \le \limsup_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} \le \frac{1}{a^{(c)}}.$$

Переходя теперь к пределу при $c \to \infty$ и учитывая, что $\lim_{c\to\infty} a^{(c)} = a$, получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Из доказательства теоремы следует, в частности, что фукция восстановления $U(t)$ конечна при любом $t \ge 0$. Нетрудно понять, что функция восстановления не убывает и непрерывна справа (см. (6)).