

## Лекция 1

### Понятие случайного процесса.

#### Процесс Пуассона

В теории вероятностей основными объектами исследований являются *случайные величины и векторы*. Напомним их определение. Пусть задано некоторое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . На числовой прямой  $\mathbb{R}$  рассмотрим борелевскую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{B}$  (так называется минимальная  $\sigma$ -алгебра, содержащая все открытые подмножества прямой  $\mathbb{R}$ ). Случайной величиной называется отображение  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , измеримое относительно пары  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{B}$ . Это означает, что для произвольного множества  $A \in \mathcal{B}$  его прообраз  $\xi^{-1}(A)$  принадлежит  $\mathcal{F}$ .

Случайным вектором называется упорядоченная совокупность случайных величин  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , заданных на одном вероятностном пространстве. Равносильное определение случайного вектора состоит в следующем. Так называется отображение  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ , измеримое относительно пары  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{B}^m$ , где  $\mathcal{B}^m$  – борелевская  $\sigma$ -алгебра пространства  $\mathbb{R}^m$ .

В теории случайных процессов рассматриваются случайные явления, *развивающиеся во времени*. Дадим определение основных объектов этой теории. Пусть  $\mathbb{N}_0$  означает множество  $\{0, 1, \dots\}$ .

**Определение 1.** Случайной последовательностью называется последовательность случайных величин  $\xi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , заданных на одном вероятностном пространстве.

**Определение 2.** Случайным процессом называется совокупность случайных величин  $X(t)$ , зависящих от параметра  $t \geq 0$  и заданных на одном вероятностном пространстве. Случайный процесс обозначается  $\{X(t), t \geq 0\}$ , или  $\{X(t)\}$ , или просто  $X$ .

Напомним, что основным инструментом исследования случайной величины  $\xi$  является ее *распределение*. Так называется вероятностная мера  $\mathbf{P}^{(\xi)}$  на измеримом пространстве  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , задаваемая равенством

$$\mathbf{P}^{(\xi)}(A) = \mathbf{P}(\xi \in A), \quad A \in \mathcal{B}.$$

Часто вместо распределения рассматривают *функцию распределения*

$$F(x) = \mathbf{P}(\xi \in (-\infty, x]) = \mathbf{P}(\xi \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Аналогично распределением случайного вектора  $\bar{\xi}$  называется вероятностная мера  $\mathbf{P}^{(\bar{\xi})}$  на измеримом пространстве  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$ , задаваемая равенством

$$\mathbf{P}^{(\bar{\xi})}(A) = \mathbf{P}(\bar{\xi} \in A), \quad A \in \mathcal{B}^m.$$

**Определение 3.** Конечномерным распределением случайного процесса  $X$ , отвечающим моментам времени  $t_1, \dots, t_m$  ( $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m$ ),  $m \in \mathbb{N}$ , называется распределение случайного вектора  $(X(t_1), \dots, X(t_m))$ , т.е. следующая вероятностная мера на измеримом пространстве  $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m)$ :

$$\mathbf{P}_{t_1, \dots, t_m}^{(X)}(A) = \mathbf{P}((X(t_1), \dots, X(t_m)) \in A), \quad A \in \mathcal{B}^m.$$

Рассмотрим *примеры* случайных последовательностей и процессов.

*Случайное блуждание.* Пусть  $X_1, X_2, \dots$  – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Положим

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$  называется *случайным блужданием*. Поскольку  $S_n$  является случайной величиной при каждом  $n \in \mathbb{N}_0$ , то указанная последовательность является случайной. Отметим, что при  $n, m \in \mathbb{N}$  случайные величины  $S_{n+m} - S_n$  и  $S_n$  являются независимыми, причем  $S_{n+m} - S_n \stackrel{d}{=} S_m$  (символ  $\stackrel{d}{=}$  означает совпадение распределений). Указанное свойство случайного блуждания называют *марковским свойством*.

Значительный интерес в дальнейшем представляет ситуация, когда случайные величины  $X_1, X_2, \dots$  имеют показательное распределение с параметром  $\lambda > 0$ , т.е.

$$\mathbf{P}(X_1 > t) = e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Найдем одномерные распределения последовательности  $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\xi, \eta$  – независимые случайные величины,  $f(x, y)$  – измеримое отображение  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}$  и  $A$  – произвольное одномерное борелевское множество. Если  $\eta$  – дискретная случайная величина, принимающая значения  $x_i, i \in \mathbb{N}$ , причем  $\mathbf{P}(\eta = x_i) = p_i$ , то

$$\mathbf{P}(f(\xi, \eta) \in A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(f(\xi, x_i) \in A) p_i.$$

Если  $\eta$  – случайная величина с плотностью вероятностей  $p(\cdot)$ , то

$$\mathbf{P}(f(\xi, \eta) \in A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}(f(\xi, x) \in A) p(x) dx.$$

*Доказательство.* В дискретном случае по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(f(\xi, \eta) \in A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(f(\xi, \eta) \in A \mid \eta = x_i) p_i = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(f(\xi, x_i) \in A \mid \eta = x_i) p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(f(\xi, x_i) \in A) p_i \end{aligned}$$

(последнее равенство объясняется тем, что случайные события  $\{f(\xi, x_i) \in A\}$  и  $\{\eta = x_i\}$  независимы). В непрерывном случае доказательство проведите самостоятельно.

**Теорема 1.** Если случайные величины  $X_1, X_2, \dots$  имеют показательное распределение с параметром  $\lambda > 0$ , то при  $t > 0$

$$\mathbf{P}(S_n > t) = \left(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

*Доказательство.* Соотношение (1) устанавливается по индукции. При  $n = 1$  оно справедливо, поскольку  $X_1$  имеет показательное распределение с параметром  $\lambda$ . Предположим, что (1) справедливо при некотором  $n \in \mathbb{N}$ . По лемме 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{n+1} > t) &= \mathbf{P}(S_{n+1} > t, X_{n+1} > t) + \mathbf{P}(S_{n+1} > t, X_{n+1} \leq t) = \\ &= \mathbf{P}(X_{n+1} > t) + \mathbf{P}(S_n + X_{n+1} > t, X_{n+1} \leq t) = \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(S_n + x > t, x \leq t) \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t \mathbf{P}(S_n + x > t) \lambda e^{-\lambda x} dx. \end{aligned}$$

По предположению индукции

$$\begin{aligned} &e^{-\lambda t} + \int_0^t \mathbf{P}(S_n + x > t) \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= e^{-\lambda t} + \int_0^t \left(1 + \lambda(t-x) + \dots + \frac{(\lambda(t-x))^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-\lambda(t-x)} \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= e^{-\lambda t} + \left(\lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} \dots + \frac{(\lambda t)^n}{n!}\right) e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

В итоге получаем, что

$$\mathbf{P}(S_{n+1} > t) = e^{-\lambda t} + \left(\lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} \dots + \frac{(\lambda t)^n}{n!}\right) e^{-\lambda t},$$

т.е. соотношение (1) справедливо и при  $n + 1$ . Теорема доказана.

*Процесс восстановления.* Пусть  $X_1, X_2, \dots$  – последовательность независимых одинаково распределенных положительных случайных величин и  $S_0 = 0$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Положим

$$\nu(0) = 0, \quad \nu(t) = \max\{n \in \mathbf{N}_0 : S_n \leq t\}, \quad t > 0.$$

Величина  $\nu(t)$  при фиксированном  $t > 0$  принимает целые неотрицательные значения. Множество  $\{\nu(t) = k\}$  при  $k \in \mathbb{N}_0$  совпадает с множеством  $\{S_k \leq t\} \cap \{S_{k+1} > t\}$ . Следовательно, множество  $\{\nu(t) = k\}$  является случайным событием. Таким образом, величина  $\nu(t)$  при фиксированном  $t > 0$  является случайной. А это означает, что  $\{\nu(t), t \geq 0\}$  образует случайный процесс, который называется *процессом восстановления*.

Наглядно его можно представить следующим образом. В момент времени 0 начинает функционировать некоторый прибор, срок службы которого равен  $X_1$ , в момент  $X_1$  (равный  $S_1$ ) выхода из строя этого прибора он мгновенно заменяется на следующий прибор, срок службы которого равен  $X_2$ . В момент  $X_1 + X_2$  (равный  $S_2$ ) выхода из строя второго прибора он мгновенно заменяется на следующий прибор, срок службы которого равен  $X_3$  и т.д. Величины  $S_1, S_2, \dots$  называются соответственно первым, вторым и т.д. *моментами восстановления*. Величина  $\nu(t)$  при этом равна числу восстановлений до момента  $t$  включительно.

**Определение 4.** *Процессом Пуассона* называется частный случай процесса восстановления  $\{\nu(t), t \geq 0\}$ , когда случайные величины  $X_1, X_2, \dots$  имеют показательное распределение с параметром  $\lambda > 0$ . При этом параметр  $\lambda$  называется *интенсивностью* процесса Пуассона.

Найдем конечномерные распределения процесса Пуассона. Напомним, что случайная величина  $\eta$  имеет *распределение Пуассона* с параметром  $a$  (короткая запись:  $\eta \sim \Pi_a$ ), если  $\eta$  принимает значения из  $\mathbb{N}_0$  и

$$\mathbf{P}(\eta = n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2)$$

**Теорема 2.** Пусть  $\{\nu(t), t \geq 0\}$  – процесс Пуассона, тогда при  $t > 0$

$$\nu(t) \sim \Pi_{\lambda t}.$$

*Доказательство.* Поскольку при  $n \in \mathbb{N}_0$

$$\{\nu(t) = n\} = \{S_n \leq t, S_{n+1} > t\} = \{S_{n+1} > t\} \setminus \{S_n > t\},$$

то по теореме 1

$$\mathbf{P}(\nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_{n+1} > t) - \mathbf{P}(S_n > t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Вспоминая соотношение (2), получаем утверждение теоремы.

**Замечание 1.** Если  $\eta \sim \Pi_a$ , то  $\mathbf{E}\eta = a$ . Следовательно,  $\mathbf{E}\nu(1) = \lambda$ . Итак,  $\lambda$  – среднее число восстановлений за единицу времени. Это объясняет, почему параметр  $\lambda$  называется интенсивностью процесса Пуассона.

Перейдем к нахождению двумерных распределений процесса Пуассона.

**Лемма 2.** В условиях теоремы 1 при  $n \in \mathbb{N}_0$  и  $t > 0, s \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s \mid \nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_1 > s). \quad (3)$$

*Доказательство.* При  $s < 0$  обе части формулы (3) равны 1. Заметим, что при  $s \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s, \nu(t) = n) &= \mathbf{P}(S_{n+1} > t + s, S_n \leq t, S_{n+1} > t) = \\ &= \mathbf{P}(S_{n+1} > t + s, S_n \leq t).\end{aligned}\quad (4)$$

Пусть  $f_n(\cdot)$  – плотность вероятностей случайной величины  $S_n$  (см. теорему 1). По лемме 1

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s, S_n \leq t) &= \mathbf{P}(S_n + X_{n+1} > t + s, S_n \leq t) = \\ &= \int_0^{+\infty} \mathbf{P}(x + X_{n+1} > t + s, x \leq t) f_n(x) dx = \\ &= \int_0^t \mathbf{P}(x + X_{n+1} > t + s) f_n(x) dx = e^{-\lambda s} \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} f_n(x) dx.\end{aligned}\quad (5)$$

Из (4) и (5) находим, что

$$\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s, \nu(t) = n) = e^{-\lambda s} \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} f_n(x) dx.\quad (6)$$

Из соотношения (6) при  $s = 0$  следует, что

$$\mathbf{P}(\nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_{n+1} > t, \nu(t) = n) = \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} f_n(x) dx\quad (7)$$

(первое равенство очевидно). Из соотношений (6) и (7) вытекает, что

$$\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s, \nu(t) = n) = e^{-\lambda s} \mathbf{P}(\nu(t) = n).\quad (8)$$

После деления (8) на  $\mathbf{P}(\nu(t) = n)$  получаем утверждение леммы.

**Лемма 3.** В условиях теоремы 1 при  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \in \mathbb{N}$  и  $t > 0$ ,  $s \geq 0$

$$\mathbf{P}(S_{n+m} > t + s \mid \nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_m > s).\quad (9)$$

*Доказательство.* Пусть  $m > 1$ . Очевидно,

$$\mathbf{P}(S_{n+m} > t + s \mid \nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_{n+1} > t + s - \eta \mid \nu(t) = n),\quad (10)$$

где  $\eta = S_{n+m} - S_{n+1} \stackrel{d}{=} S_{m-1}$ . Случайная величина  $\eta$  не зависит от совокупности величины  $S_{n+1}$  и события  $\{\nu(t) = n\}$ , поэтому по лемме 1

$$\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s - \eta \mid \nu(t) = n) =$$

$$= \int_0^{\infty} f_{m-1}(x) \mathbf{P}(S_{n+1} > t + s - x \mid \nu(t) = n) dx. \quad (11)$$

Учитывая, что утверждение леммы доказано при  $m = 1$  (см. лемму 2), заключаем, что

$$\mathbf{P}(S_{n+1} > t + s - x \mid \nu(t) = n) = \mathbf{P}(S_1 > s - x). \quad (12)$$

Из соотношений (10)-(12) находим, что

$$\mathbf{P}(S_{n+m} > t + s \mid \nu(t) = n) = \int_0^{\infty} f_{m-1}(x) \mathbf{P}(S_1 > s - x) dx. \quad (13)$$

По лемме 1

$$\mathbf{P}(S_m > s) = \mathbf{P}(S_{m-1} + X_m > s) = \int_0^{\infty} f_{m-1}(x) \mathbf{P}(S_1 > s - x) dx. \quad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), получаем (9). Лемма доказана.

**Замечание 2.** Соотношение (9) называют *свойством отсутствия последствия* процесса Пуассона. Смысл его состоит в том, что если известно число восстановлений до момента  $t$ , то  $m$ -ый момент восстановления, наблюдаемый после момента  $t$ , будет иметь в новой временной шкале, начинающейся с момента  $t$ , такое же распределение как  $m$ -ый момент восстановления процесса Пуассона.

**Определение 5.** Говорят, что случайный процесс  $\{X(t), t \geq 0\}$  имеет *независимые приращения*, если для произвольных моментов времени  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m, m \in \mathbb{N}$ , случайные величины  $X(0), X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_m) - X(t_{m-1})$  независимы.

**Теорема 3.** Процесс Пуассона  $\{\nu(t), t \geq 0\}$  является процессом с независимыми приращениями, причем при  $t, s > 0$

$$\nu(t + s) - \nu(t) \sim \Pi_{\lambda s}. \quad (15)$$

*Доказательство.* Установим для простоты изложения лишь независимость случайных величин  $\nu(t)$  и  $\nu(t + s) - \nu(t)$ . По лемме 3 при  $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\nu(t + s) = n + m \mid \nu(t) = n) = \\ &= \mathbf{P}(S_{n+m} \leq t + s, S_{n+m+1} > t + s \mid \nu(t) = n) = \\ &= \mathbf{P}(S_{n+m+1} > t + s \mid \nu(t) = n) - \mathbf{P}(S_{n+m} > t + s \mid \nu(t) = n) = \\ &= \mathbf{P}(S_{m+1} > s) - \mathbf{P}(S_m > s) = \mathbf{P}(S_m \leq s, S_{m+1} > s) = \mathbf{P}(\nu(s) = m). \end{aligned}$$

Значит,

$$\mathbf{P}(\nu(t) = n, \nu(t + s) = n + m) = \mathbf{P}(\nu(t) = n) \mathbf{P}(\nu(s) = m). \quad (16)$$

Формулу (16) можно переписать:

$$\mathbf{P}(\nu(t) = n, \nu(t+s) - \nu(t) = m) = \mathbf{P}(\nu(t) = n) \mathbf{P}(\nu(s) = m), \quad (17)$$

т.е. случайные величины  $\nu(t)$  и  $\nu(t+s) - \nu(t)$  независимы. Суммируя по всем  $n \in \mathbb{N}_0$  левую и правую части соотношения (17), находим, что

$$\nu(t+s) - \nu(t) \stackrel{d}{=} \nu(s).$$

Откуда по теореме 1 получаем (15). Теорема доказана.

Процессы с независимыми приращениями играют важную роль в теории случайных процессов. Отметим, что и случайные блуждания, и процесс Пуассона имеют независимые приращения.

Данное ранее определение 4 называется *конструктивным определением* процесса Пуассона. В связи с теоремой 3 можно дать *общее определение* процесса Пуассона.

**Определение 6.** Случайный процесс  $\{X(t), t \geq 0\}$  называется *процессом Пуассона с интенсивностью  $\lambda > 0$* , если

- 1)  $X(0) = 0$ ;
- 2) процесс  $\{X(t), t \geq 0\}$  имеет независимые приращения;
- 3)  $X(t+s) - X(t) \sim \Pi_{\lambda s}$  при  $t \geq 0$  и  $s > 0$ .