

Экзаменационная программа курса  
„Теория случайных процессов”  
2023-24 у. г.

1. Случайные последовательности и процессы. Конечномерные распределения. Случайное блуждание, его марковское свойство и одномерные распределения в случае показательного распределенного шага.

2. Процесс Пуассона. Его одномерные и двумерные распределения. Независимость приращений процесса Пуассона. Общее определение процесса Пуассона.

3. Закон больших чисел и центральная предельная теорема для процесса восстановления.

4. Функция восстановления. Тождество Вальда. Интегральная теорема восстановления.

5. Тождества для вероятности восстановления в определенный момент.

6. Локальная теорема восстановления.

7. Марковская цепь. Переходные вероятности. Конечномерные распределения марковской цепи для подряд идущих моментов времени. Взаимосвязь прошлого, настоящего и будущего марковской цепи.

8. Переходные вероятности за конечное число шагов. Конечномерные распределения марковской цепи для произвольных моментов времени. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Матрицы переходных вероятностей.

9. Примеры марковских цепей, включая стохастически рекурсивную последовательность.

10. Распределение последовательности моментов возвращения марковской цепи. Классификация ее состояний: возвратные и невозвратные, положительно и нуль возвратные, периодические и непериодические.

11. Критерии возвратности и положительной возвратности состояния марковской цепи.

12. Критерий периодичности состояния марковской цепи

13. Сообщающиеся состояния. Свойство солидарности. Конечность времени достижения для двух сообщающихся возвратных состояний.

14. Предельная теорема для неприводимых марковских цепей (существование положительных пределов переходных вероятностей).

15. Предельная теорема для неприводимых марковских цепей (система линейных уравнений для пределов переходных вероятностей).

16. Сходимость марковской цепи по распределению. Стационарное распределение и стационарность марковской цепи со стационарным начальным распределением.

17. Простое случайное блуждание с двумя отражающими экранами.

18. Ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона. Вычисление производящей функции численности произвольного поколения. Классификация ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона.

19. Условия вырождения ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона.

20. Асимптотика вероятности невырождения критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона.

21. Теорема Яглома для критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона.
22. Броуновское движение. Его многомерная характеристическая функция. Броуновское движение как гауссовский процесс.
23. Функции Шаудера и их свойства. Достаточные условия сходимости ряда, составленного из функций Шаудера (в том числе со случайными коэффициентами).
24. Существование броуновского движения.
25. Свойства автомодельности, симметрии и инверсии броуновского движения. Бесконечность вариации траекторий броуновского движения.
26. Сходимость случайных процессов, построенных по случайному блужданию с нулевым сносом, к броуновскому движению (в смысле конечномерных распределений).
27. Определение мартингала. Примеры мартингалов (для случайного блуждания, ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона и броуновского движения).
28. Субмартингалы. Функциональные преобразования мартингалов и субмартингалов. Примеры субмартингалов.
29. Теорема Дуба о разложении субмартингалов.
30. Марковские моменты и сигма-алгебры событий, наблюдаемых до их наступления. Их свойства.
31. Теорема Дуба об остановке для ограниченных марковских моментов. Тождество Вальда.
32. Максимальные и минимальные неравенства для субмартингалов.
33. Неравенство Дуба для числа пересечений полосы субмартингалом.
34. Теорема о сходимости субмартингалов и ее следствие для неотрицательных супермартингалов.
35. Определение стационарной последовательности. Примеры. Инвариантные множества (в том числе, используемые в теореме Биркгофа-Хинчина).
36. Лемма Хопфа.
37. Теорема Биркгофа-Хинчина.
38. Закон больших чисел для эргодической стационарной последовательности.
39. Стационарная в широком смысле последовательность. Свойства ее ковариационной функции. Примеры.
40. Теорема Герглотца.
41. Теорема Хинчина о спектральном представлении ковариационной функции стационарной в широком смысле последовательности. Белый шум.
42. Закон больших чисел для стационарной в широком смысле последовательности.