Лекция 13

Стационарные последовательности

Рассмотрим еще один класс случайных последовательностей, обобщающих последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Это так называемые *стационарные последовательности*, характеризующиеся тем, что их конечномерные распределения не меняются при любом временном сдвиге. Значительную роль в развиитии теории этих процессов сыграли советские математики А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров и американский математик Винер.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – исходное вероятностное пространство.

Определение 1. Случайная последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *стационарной*, если для произвольного $m \in \mathbb{N}_0$ распределение случайного вектора $(\xi_0, \ldots, \xi_m)$ не меняется при произвольном временном сдвиге $r \in \mathbb{N}$, т.е.

$$(\xi_0, \ldots, \xi_m) \stackrel{d}{=} (\xi_r, \ldots, \xi_{m+r}) .$$

Для проверки стационарности достаточно показать, что

$$(\xi_0, \ldots, \xi_m) \stackrel{d}{=} (\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}) .$$

В свою очередь, это равенство выполняется тогда и только тогда, когда для произвольной измеримой неотрицательной числовой функции f от числовых переменных $x_0, \ldots, x_m$ выполняется равенство

$$\mathbf{E} f(\xi_0, \ldots, \xi_m) = \mathbf{E} f(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1})$$

(допустимы дополнительные ограничения на f: непрерывность, ограниченность).

Пример 1. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Зафиксируем числа $k \in \mathbb{N}_0$ и $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Положим при $n \in \mathbb{N}_0$

$$\xi_n = a_0 X_n + a_1 X_{n+1} + \ldots + a_k X_{n+k}.$$

Последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является стационарной (при этом $\xi_0, \xi_1, \ldots$ – зависимые случайные величины, если $k \geq 1$). Действительно,

$$(\xi_0, \ldots, \xi_m) = \overline{g}(X_0, X_1, \ldots, X_{m+k}),$$

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}) = \overline{g}(X_1, X_2, \ldots, X_{m+1+k}).$$

где при $x_0, x_1, \ldots, x_{m+k} \in \mathbb{R}$

$$\overline{g}(x_0, x_1, \ldots, x_{m+k}) = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i x_i, \sum_{i=0}^{k} a_i x_{i+1}, \ldots, \sum_{i=0}^{k} a_i x_{i+m} \right).$$

Далее,

$$(X_0, X_1, \ldots, X_{m+k}) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \ldots, X_{m+1+k}),$$

поскольку и левая, и правая части составлены из независимых величин с одинаковым распределением. Следовательно,

$$(\xi_0, \ldots, \xi_m) \stackrel{d}{=} \left(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}\right).$$

Пример 2. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{E}X_0 \in (-\infty, 0)$. Положим при $n \in \mathbb{N}_0$

$$\xi_n = e^{X_n} + e^{X_n + X_{n+1}} + e^{X_n + X_{n+1} + X_{n+2}} + \ldots.$$

Последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является стационарной.

Положим

$$S_0 = 0,\ S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Исследовать последовательность $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ в случае стационарной случайной последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$ сложнее, чем случайные блуждания. Тем не менее, для таких последовательностей создана соответствующая теория, включающая закон больших чисел и центральную предельную теорему. Ограничимся рассмотрением закона больших чисел.

Определение 2. Случайное событие $A \in \sigma(\xi_0, \xi_1, \ldots)$ называется *инвариантным*, если случайная последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, рассматриваемая только на множестве A, снова является стационарной, т.е. для произвольного $m \in \mathbb{N}_0$ и для произвольного борелевского множества B из $\mathbb{R}^{m+1}$

$$\mathbf{P}\left((\xi_0, \ldots, \xi_m) \in B;\ A\right) = \mathbf{P}\left(\left(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}\right) \in B;\ A\right). \tag{1}$$

В случае, когда $\mathbf{P}(A) = 0$, соотношение (1) выполняется автоматически. Если же $\mathbf{P}(A) > 0$, то, разделив (1) на $\mathbf{P}(A)$, получаем, что

$$\mathbf{P}\left((\xi_0, \ldots, \xi_m) \in B \mid A\right) = \mathbf{P}\left(\left(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}\right) \in B \;\middle|\; A\right).$$

Последнее равенство означает, что последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, рассматриваемая на вероятностном пространстве $(A, \mathcal{F} \cap A, \mathbf{P}(\cdot \mid A))$, является стационарной (здесь $\mathcal{F} \cap A$ – совокупность множеств вида $C \cap A$, где $C \in \mathcal{F}$, а $\mathbf{P}(\cdot \mid A)$ – условная вероятностная мера).

Отметим, что если $A \in \sigma(\xi_0, \xi_1, \ldots)$ и $\mathbf{P}(A) = 0$ или $\mathbf{P}(A) = 1$, то A – инвариантное событие. Отметим также, что левая и правая части соотношения (1) являются мерами $\mu_1(B)$ и $\mu_2(B)$, поэтому (1) выполняется тогда и только тогда, когда для произвольной измеримой неотрицательной числовой функции f от числовых переменных $x_0, \ldots, x_m$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}\left(f(\xi_0, \ldots, \xi_m);\ A\right) = \mathbf{E}\left(f\left(\xi_1, \ldots, \xi_{m+1}\right);\ A\right). \tag{2}$$

Лемма 1. *Если D и G – произвольные одномерные борелевские множества, то события $\left\{\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\in D\right\}$ и $\left\{\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\in G\right\}$ и их пересечение инвариантны.*

Доказательство. Установим, для примера, инвариантность события $A = \{\limsup_{n\to\infty}(S_n/n)\in D\}$, а для этого требуется показать (см. (2)), что для измеримой ограниченной неотрицательной числовой функции f

$$\mathbf{E}\left(f(\xi_0,\ldots,\xi_m);\ \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\in D\right)=$$
$$=\mathbf{E}\left(f\left(\xi_1,\ldots,\xi_{m+1}\right);\ \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\in D\right). \tag{3}$$

Левая и правая части соотношения (3) являются некоторыми мерами $\mu_1(D)$ и $\mu_2(D)$. Поэтому для справедливости соотношения (3) достаточно показать, что для произвольной непрерывной ограниченной неотрицательной числовой функции g

$$\mathbf{E}f(\xi_0,\ldots,\xi_m)\,g\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right)=\mathbf{E}f\left(\xi_1,\ldots,\xi_{m+1}\right)g\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right). \tag{4}$$

Положим $S'_0=0$, $S'_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ при $n\in\mathbb{N}$. Замечая, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\xi_0+S'_{n-1}}{n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{S'_{n-1}}{n}=\limsup_{n\to\infty}\frac{S'_{n-1}}{n-1}=\limsup_{n\to\infty}\frac{S'_n}{n},$$

получаем, что (4) эквивалентно равенству

$$\mathbf{E}f(\xi_0,\ldots,\xi_m)\,g\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right)=\mathbf{E}f\left(\xi_1,\ldots,\xi_{m+1}\right)g\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{S'_n}{n}\right). \tag{5}$$

Докажем (5). В силу стационарности при $k,l\in\mathbb{N}_0$ $(k\le l)$

$$\mathbf{E}f(\xi_0,\ldots,\xi_m)\,g\left(\max_{k\le n\le l}\frac{S_n}{n}\right)=\mathbf{E}\left(f\left(\xi_1,\ldots,\xi_{m+1}\right)g\left(\max_{k\le n\le l}\frac{S'_n}{n}\right)\right). \tag{6}$$

Поскольку

$$\sup_{n\ge k}\frac{S_n}{n}=\lim_{l\to\infty}\max_{k\le n\le l}\frac{S_n}{n},$$

то из соотношения (6), устремляя l к ∞, по теореме о мажорируемой сходимости находим, что

$$\mathbf{E}f(\xi_0,\ldots,\xi_m)\,g\left(\sup_{n\ge k}\frac{S_n}{n}\right)=\mathbf{E}\left(f\left(\xi_1,\ldots,\xi_{m+1}\right)g\left(\sup_{n\ge k}\frac{S'_n}{n}\right)\right). \tag{7}$$

Далее, поскольку

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{k\to\infty}\sup_{n\ge k}\frac{S_n}{n},$$

то из (7), устремляя k к ∞, по теореме о мажорируемой сходимости получаем (5). Лемма доказана.

Следующее неравенство выполняет роль, аналогичную той, которую играет неравенство Колмогорова при доказательстве закона больших чисел для случайного блуждания. Рассмотрим для произвольных чисел $p \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ случайное событие $B_n = \{\max_{1 \le k \le n} (S_k/k) > p\}$.

Лемма 2 (Хопф). *Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – стационарная последовательность, причем $\mathbf{E}\,|\xi_0| < +\infty$, и пусть A – произвольное инвариантное множество. Тогда для произвольных $p \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathbf{E}\,(\xi_0;\ AB_n) \ge p\mathbf{P}\,(AB_n)\,.$$

Доказательство. Поскольку последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, рассматриваемая только на инвариантном событии A, стационарна, то достаточно ограничиться рассмотрением множества $A = \Omega$ и доказать, что

$$\mathbf{E}\,(\xi_0;\ B_n) \ge p\mathbf{P}\,(B_n)\,. \tag{8}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $p = 0$. Тогда $B_n = \{\max_{1 \le k \le n} S_k > 0\}$. Положим, как и ранее, $S_0' = 0$, $S_n' = \sum_{k=1}^n \xi_k$ при $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что

$$\max_{1 \le k \le n} S_k = \xi_0 + \max_{0 \le k \le n-1} S_k'.$$

Если событие B_n произошло, то

$$\max_{1 \le k \le n} S_k = \max_{0 \le k \le n} S_k,$$

поэтому

$$\xi_0 = \max_{0 \le k \le n} S_k - \max_{0 \le k \le n-1} S_k' \ge \max_{0 \le k \le n} S_k - \max_{0 \le k \le n} S_k'.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\,(\xi_0;\ B_n) \ge \mathbf{E}\left(\max_{0 \le k \le n} S_k;\ B_n\right) - \mathbf{E}\left(\max_{0 \le k \le n} S_k';\ B_n\right). \tag{9}$$

Первое математическое ожидание в правой части соотношения (9) равно $\mathbf{E}\max_{0 \le k \le n} S_k$, а второе – не больше, чем $\mathbf{E}\max_{0 \le k \le n} S_k'$. Поэтому

$$\mathbf{E}\,(\xi_0;\ B_n) \ge \mathbf{E}\max_{0 \le k \le n} S_k - \mathbf{E}\max_{0 \le k \le n} S_k'. \tag{10}$$

Случайная величина $\max_{0 \le k \le n} S_k$ представима в виде $f\left(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\right)$, где f – некоторая измеримая неотрицательная числовая функция. Ясно, что $\max_{0 \le k \le n} S_k' = f\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)$. Следовательно (см. (2)),

$$\mathbf{E}\max_{0 \le k \le n} S_k = \mathbf{E}\max_{0 \le k \le n} S_k',$$

причем $\mathbf{E}\max_{0 \le k \le n} S_k \le \mathbf{E}\sum_{k=0}^n |S_k| \le \mathbf{E}\sum_{k=0}^n k\mathbf{E}\,|\xi_0| < +\infty$. Таким образом, правая часть (10) равна 0. Итак, соотношение (8) доказано при $p = 0$.

В случае, когда $p \in \mathbb{R}$, вместо последовательности $\xi_0, \xi_1, \ldots$ надо рассмотреть стационарную последовательность $\xi_0 - p, \xi_1 - p, \ldots$ и применить к ней уже доказанный результат. Лемма доказана.

Теорема 1 (Биркгоф-Хинчин). *Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – стационарная последовательность, причем $\mathbf{E}\,|\xi_0| < +\infty$. Тогда п.н. существует конечный предел S_n/n при $n \to \infty$.*

Доказательство. Сначала заметим, что п.н.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < +\infty, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > -\infty, \tag{11}$$

т.е. левые части являются конечными случайными величинами. Установим первое неравенство (второе неравенство следует из первого путем перехода к стационарной последовательности $\{-\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$). Из леммы 2 при $A = \Omega$ следует, что при $p > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{1\le k\le n} \frac{S_k}{k} > p\right) \le \frac{\mathbf{E}\,|\xi_0|}{p}.$$

Откуда, устремляя n к ∞, находим по аксиоме непрерывности, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{S_n}{n} > p\right) \le \frac{\mathbf{E}\,|\xi_0|}{p}.$$

Теперь, устремляя p к $+\infty$, получаем по той же аксиоме, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{S_n}{n} = +\infty\right) = 0.$$

Таким образом, первое неравенство соотношения (11) доказано.

Рассмотрим произвольные $p, q \in \mathbb{R}$, причем $p > q$. Положим

$$C_p = \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} > p\right\}, \qquad D_q = \left\{\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < q\right\}.$$

Применим лемму 2 к инвариантному множеству $A = C_q D_p$ (см. лемму 1):

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ C_p D_q B_n\right) \ge p\mathbf{P}\left(C_p D_q B_n\right), \tag{12}$$

где $B_n = \{\max_{1\le k\le n} (S_k/k) > p\}$. Заметим, что события B_n не убывают и

$$B := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{S_n}{n} > p\right\}.$$

Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в (12), получаем по аксиоме непрерывности, что

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ C_p D_q B\right) \ge p\mathbf{P}\left(C_p D_q B\right).$$

Далее, $C_p B = C_p$, поэтому

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ C_p D_q\right) \ge p\mathbf{P}\left(C_p D_q\right),$$

т.е. (вспомним (11))

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ \liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < q,\ p < \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right) \ge$$

$$\ge p\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} < q,\ p < \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}\right). \tag{13}$$

Аналогично, рассматривая стационарную последовательность $\{-\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ и числа $(-q)\,,(-p)$, находим, что

$$\mathbf{E}\left(-\xi_0;\ \liminf_{n\to\infty}\frac{-S_n}{n} < -p,\ -q < \limsup_{n\to\infty}\frac{-S_n}{n}\right) \geq$$

$$\geq -q\mathbf{P}\left(\ \liminf_{n\to\infty}\frac{-S_n}{n} < -p,\ -q < \limsup_{n\to\infty}\frac{-S_n}{n}\right),$$

т.е.

$$\mathbf{E}\left(\xi_0;\ \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} > p,\ q > \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right) \leq$$

$$\leq q\mathbf{P}\left(\ \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} > p,\ q > \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right). \tag{14}$$

Сравнивая (13) и (14), видим, что при $p > q$ такое возможно, если только

$$\mathbf{P}\left(\ \liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} < q,\ p < \limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}\right) = 0.$$

Известно, что если ξ и η – случайные величины и $\mathbf{P}\,(\xi < a < b < \eta) = 0$ для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$, то п.н. $\xi \geq \eta$ (см. лемму 4 предыдущей лекции). Таким образом, п.н. $\liminf_{n\to\infty}(S_n/n) \geq \limsup_{n\to\infty}(S_n/n)$. Это означает, что п.н.существует конечный $\lim_{n\to\infty}(S_n/n)$. Теорема доказана.

Определение 3. Стационарная последовательность $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *эргодической*, если любое инвариантное множество имеет вероятность нуль или единица.

Теорема 2. *Пусть $\{\xi_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – эргодическая стационарная последовательность, причем $\mathbf{E}\,|\xi_0| < +\infty$. Тогда п.н.*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = \mathbf{E}\xi_0.$$

Доказательство. По теореме 1 п.н.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} := \zeta,$$

где ζ – некоторая случайная величина. Случайное событие $\{\zeta \leq x\}$, $x \in \mathbb{R}$, по лемме 1 является инвариантным. Ввиду эргодичности вероятность $\mathbf{P}\,(\zeta \leq x)$ равна 0 или 1. Отсюда следует, что п.н. $\zeta = C$, где C – некоторая постоянная. Итак, п.н.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n} = C. \tag{15}$$

Покажем, что также имеет место сходимость в смысле L^1, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - C\right| = 0. \tag{16}$$

Положим при $n \in \mathbb{N}_0$ и $M > 0$

$$\xi_n^{(M)} = \begin{cases} \xi_n,\ \text{если } \xi_n \in [-M, M]\,; \\ M,\ \text{если } \xi_n > M; \\ -M,\ \text{если } \xi_n < -M. \end{cases}$$

Последовательность $\left\{\xi_n^{(M)},\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$ также является стационарной, поэтому п.н.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^{(M)}}{n} := \zeta_M, \tag{17}$$

где $S_n^{(M)} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^{(M)}$, $n \in \mathbb{N}$, а ζ_M – некоторая случайная величина. Каждый член случайной последовательности $\left\{S_n^{(M)}/n,\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$ ограничен по модулю постоянной M, поэтому случайная величина ζ_M ограничена по модулю постоянной M. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n} - \zeta_M\right| = 0. \tag{18}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и подберем M так, чтобы $\mathbf{E}\left|\xi_0 - \xi_0^{(M)}\right| \le \varepsilon$, тогда, ввиду стационарности, при всех $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_n^{(M)}}{n}\right| \le \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{E}\left|\xi_i - \xi_i^{(M)}\right| \le \varepsilon. \tag{19}$$

По лемме Фату из (15), (17) и (19) получаем, что

$$\mathbf{E}\left|\zeta_M - C\right| = \mathbf{E}\liminf_{n\to\infty}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n} - \frac{S_n}{n}\right| \le \liminf_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n} - \frac{S_n}{n}\right| \le \varepsilon. \tag{20}$$

Из соотношений (19)-(20) находим, что

$$\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - C\right| \le \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_n^{(M)}}{n}\right| + \mathbf{E}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n} - \zeta_M\right| + \mathbf{E}\left|\zeta_M - C\right| \le$$

$$\le 2\varepsilon + \mathbf{E}\left|\frac{S_n^{(M)}}{n} - \zeta_M\right|.$$

Откуда, учитывая (18), получаем, что

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - C\right| \le 2\varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, последнее неравенство означает справедливость соотношения (14).

Из соотношения (16) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\frac{S_n}{n} = C.$$

Откуда, замечая, что $\mathbf{E}S_n/n = \mathbf{E}\xi_0$, находим, что $C = \mathbf{E}\xi_0$, а это вместе с (15) дает утверждение теоремы.

Пример 3. Рассмотрим последовательность $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, состоящую из независимых одинаково распределенных случайных величин. Она, очевидно, является стационарной. Более того, эта последовательность является эргодической (докажите сами). Предположим, что $\mathbf{E}\,|X_1| < +\infty$. Положим $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда по теореме 2 п.н.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbf{E}X_1.$$

Другими словами, получено еще одно доказательство усиленного закона больших чисел.