Лекция 12

Неравенства для субмартингалов. Сходимость субмартингалов

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и заданную на нем фильтрацию $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$.

Определение 1. Неотрицательная целочисленная случайная величина τ (с возможным значением $+\infty$) называется *марковским моментом* относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, если для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ событие $\{\tau \le n\}$ принадлежит $\mathcal{F}_n$.

Лемма 1. *Если τ – марковский момент, то $\{\tau < n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$ и $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Наоборот, если τ – неотрицательная целочисленная случайная величина и для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ событие $\{\tau = n\}$ принадлежит $\mathcal{F}_n$, то τ – марковский момент.*

Доказательство. Поскольку $\{\tau < n\} = \{\tau \le n-1\}$ и $\{\tau \le n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$, то $\{\tau < n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Далее,

$$\{\tau = n\} = \{\tau \le n\} \setminus \{\tau \le n-1\}$$

и $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$, $\{\tau \le n-1\} \in \mathcal{F}_n$, поэтому $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Докажем вторую часть утверждения. Заметим, что

$$\{\tau \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\}\,.$$

Пусть $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Поскольку $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ и $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, то $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n$. Следовательно, $\bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n$ и, значит, $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$. Лемма доказана.

Пример 1. Пусть $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – случайная последовательность, согласованная с фильтрацией $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, а B – произвольное борелевское множество. Пусть τ – момент первого достижения множества B последовательностью $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Поскольку

$$\{\tau = n\} = \left\{X_0 \in \overline{B}\right\}\left\{X_1 \in \overline{B}\right\}\dots\left\{X_{n-1} \in \overline{B}\right\}\{X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n,$$

то по лемме 1 τ – марковский момент относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$.

Случайная величина, равная постоянной, является марковским моментом; если τ и σ – марковские моменты, то таковыми являются случайные величины $\tau + \sigma$, $\min(\tau, \sigma)$, $\max(\tau, \sigma)$ (эти утверждения докажите сами).

Определение 2. Для марковского момента τ введем σ-алгебру

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n \text{ для каждого } n \in \mathbb{N}_0\}\,.$$

Введенная σ-алгебра называется *σ-алгеброй событий, наблюдаемых до случайного момента τ.*

Лемма 2. *Пусть τ – марковский момент и событие $A \in \mathcal{F}_\tau$, тогда $A \cap \{\tau < n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$ и $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Наоборот, если событие A таково, что $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}_0$, то $A \in \mathcal{F}_\tau$.*

Доказательство. Пусть τ – марковский момент и событие $A \in \mathcal{F}_\tau$, тогда

$$A \cap \{\tau < n\} = A \cap \{\tau \le n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1},$$

$$A \cap \{\tau = n\} = (A \cap \{\tau \le n\}) \setminus (A \cap \{\tau \le n-1\}) \in \mathcal{F}_n.$$

Если $A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ для каждого $k \in \mathbb{N}_0$, то $A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n$ для $k \in \{0, \dots, n\}$, где $n \in \mathbb{N}_0$, и, следовательно,

$$A \cap \{\tau \le n\} = \bigcup_{k=0}^{n} A \cap \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n.$$

Значит, $A \in \mathcal{F}_\tau$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если τ и σ – марковские моменты, причем $\tau \le \sigma$, то $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{F}_\tau$, тогда при $n \in \mathbb{N}_0$

$$A \cap \{\sigma = n\} = A \cap (\{\sigma = n\} \cap \{\tau \le n\}) = (A \cap \{\tau \le n\}) \cap \{\sigma = n\} \in \mathcal{F}_n$$

(здесь учтено, что $A \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$). Следовательно, по лемме 2 $A \subset \mathcal{F}_\sigma$. Лемма доказана.

Следующий результат, установленный Дубом, называется *теоремой об остановке*. Будем говорить, что случайная величина ξ ограничена сверху, если п.н. $\xi \le K$, где K – некоторая постоянная.

Теорема 1. *Пусть $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – мартингал, пусть τ и σ – ограниченные марковские моменты, причем $\tau \le \sigma$. Тогда*

$$\mathbf{E}\,(\,X_\sigma \mid \mathcal{F}_\tau) = X_\tau.$$

Доказательство. Пусть п.н. $\sigma \le K$, где $K \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\mathbf{E}\,|X_\sigma| = \sum_{n=0}^{K} \mathbf{E}\,(|X_n|\,;\ \sigma = n) \le \sum_{n=0}^{K} \mathbf{E}\,|X_n| < +\infty.$$

Таким образом, определено условное математическое ожидание $\mathbf{E}\,(\,X_\sigma \mid \mathcal{F}_\tau)$. Случайная величина X_τ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$ (при $x \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}_0$ событие $\{X_\tau \le x\} \cap \{\tau = n\}$ совпадает с событием $\{X_n \le x\} \cap \{\tau = n\}$, принадлежащим $\mathcal{F}_n$). Осталось доказать, что для произвольного события $A \in \mathcal{F}_\tau$

$$\mathbf{E}\,(X_\sigma;\ A) = \mathbf{E}\,(X_\tau;\ A)\,. \tag{1}$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\sigma - \tau \le 1$. Тогда

$$\mathbf{E}\,(X_\sigma - X_\tau;\ A) = \sum_{n=0}^{K} \mathbf{E}\,(X_\sigma - X_\tau;\ A \cap \{\tau = n\}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{K} \mathbf{E}\left(X_\sigma - X_\tau;\ A \cap \{\tau = n\} \cap \{\sigma = n\}\right) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{E}\left(X_\sigma - X_\tau;\ A \cap \{\tau = n\} \cap \{\sigma = n+1\}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{K-1} \mathbf{E}\left(X_{n+1} - X_n;\ A \cap \{\tau = n\} \cap \{\sigma = n+1\}\right)$$

(здесь учтено, что если событие $\{\tau = n\} \cap \{\sigma = n\}$ произошло, то $X_\sigma - X_\tau = X_n - X_n = 0$; а если событие $\{\tau = n\} \cap \{\sigma = n+1\}$ произошло, то $X_\sigma - X_\tau = X_{n+1} - X_n$). Заметим, что

$$A \cap \{\tau = n\} \cap \{\sigma = n+1\} = A \cap \{\tau = n\} \cap \overline{\{\sigma = n\}} \in \mathcal{F}_n,$$

поскольку $A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ (см. лемму 2) и $\overline{\{\sigma = n\}} \in \mathcal{F}_n$ (см. лемму 1). Положим $B = A \cap \{\tau = n\} \cap \{\sigma = n+1\}$. Учитывая, что $\{X_n\}$ – мартингал, находим, что $\mathbf{E}\left(X_{n+1};\ B\right) = \mathbf{E}\left(X_n;\ B\right)$ при $n \in \mathbb{N}_0$ и, следовательно,

$$\mathbf{E}\left(X_{n+1} - X_n;\ A \cap \{\tau = n\} \cap \{\sigma = n+1\}\right) = 0.$$

Таким образом, $\mathbf{E}\left(X_\sigma - X_\tau;\ A\right) = 0$ и соотношение (1) доказано.

Теперь рассмотрим общий случай. Введем марковские моменты $\rho_n = \min\left(\sigma, \tau + n\right)$ при $n \in \{0, \ldots, K\}$ (ясно, что $\rho_0 = \tau$, $\rho_K = \sigma$). Заметим, что $\rho_n \le \rho_{n+1} \le \rho_n + 1$ при каждом $n \in \{0, \ldots, K-1\}$, поэтому по лемме 3 $A \in \mathcal{F}_{\rho_n}$ при $n \in \{0, \ldots, K\}$ и по доказанному

$$\mathbf{E}\left(X_{\rho_0};\ A\right) = \mathbf{E}\left(X_{\rho_1};\ A\right) = \ldots = \mathbf{E}\left(X_{\rho_K};\ A\right).$$

Откуда, замечая, что $\mathbf{E}\left(X_{\rho_0};\ A\right) = \mathbf{E}\left(X_\tau;\ A\right)$ и $\mathbf{E}\left(X_{\rho_K};\ A\right) = \mathbf{E}\left(X_\sigma;\ A\right)$, получаем (1). Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – мартингал и выполнены условия теоремы* 1, *то* $\mathbf{E}X_\tau = \mathbf{E}X_\sigma$.

Замечание 1. Если $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал и выполнены условия теоремы 1 на марковские моменты τ и σ, то $\mathbf{E}\left(X_\sigma \mid \mathcal{F}_\tau\right) \ge X_\tau$ и, значит, $\mathbf{E}X_\sigma \ge \mathbf{E}X_\tau$.

Следствие 2. *Случайная последовательность $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, согласованная с фильтрацией $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, является мартингалом относительно этой фильтрации тогда и только тогда, когда для любой неубывающей последовательности ограниченных марковских моментов $\tau_1, \tau_2, \ldots$ последовательность $\{X_{\tau_n}, \mathcal{F}_{\tau_n},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является мартингалом. Аналогичный результат справедлив для субмартингалов.*

Пример 2. Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{E}\varkappa_1 := a \in \mathbb{R}$. Введем случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть τ – ограниченный марковский момент относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\left\{S_0, \ldots, S_n\right\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда справедливо *тождество Вальда*

$$\mathbf{E}S_\tau = a\mathbf{E}\tau. \qquad (2)$$

В самом деле, положим $\widetilde{S}_n = S_n - na$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Последовательность $\left\{\widetilde{S}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$ является случайным блужданием с нулевым сносом и, следовательно, является мартингалом. Поэтому по следствию 1

$$\mathbf{E}\widetilde{S}_\tau = \mathbf{E}\widetilde{S}_0 = 0. \tag{3}$$

Поскольку $\mathbf{E}\widetilde{S}_\tau = \mathbf{E}\left(S_\tau - \tau a\right) = \mathbf{E}S_\tau - a\mathbf{E}\tau$, то из (3) следует (2).

Пример 2. Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, пусть существует такое $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, что $\mathbf{E}\exp\left(\lambda\varkappa_1\right) := a < +\infty$ (*условие Крамера*). Введем случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть τ – ограниченный марковский момент относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\left\{S_0, \ldots, S_n\right\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда справедливо *фундаментальное тождество Вальда*

$$\mathbf{E}\frac{e^{\lambda S_\tau}}{a^\tau} = 1. \tag{4}$$

В самом деле, последовательность $\left\{e^{\lambda S_n}/a^n,\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$ является мартингалом. Поэтому по следствию 1

$$\mathbf{E}\frac{e^{\lambda S_\tau}}{a^\tau} = \mathbf{E}\frac{e^{\lambda S_0}}{a^0} = 1,$$

что доказывает (4).

Установим ряд неравенств для субмартингалов, принадлежащих Дубу и называемых *максимальными* и *минимальными*. Пусть $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – случайная последовательность. Положим

$$M_n = \max_{0\le k\le n} X_k, \qquad M_n^* = \max_{0\le k\le n} |X_k|, \qquad L_n = \min_{0\le k\le n} X_k.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *– субмартингал, тогда при* $n \in \mathbb{N}$, $u > 0$

$$u\mathbf{P}\left(M_n \ge u\right) \le \mathbf{E}\left(X_n;\ M_n \ge u\right) \le \mathbf{E}X_n^+, \tag{5}$$

$$u\mathbf{P}\left(L_n \le -u\right) \le -\mathbf{E}X_0 + \mathbf{E}\left(X_n;\ L_n > -u\right) \le -\mathbf{E}X_0 + \mathbf{E}X_n^+. \tag{6}$$

Доказательство. Положим $\tau = \min\{k \ge 0 : X_k \ge u\} \wedge n$. Заметим, что τ – марковский момент, причем $\tau \le n$. По замечанию 1 $\mathbf{E}X_\tau \le \mathbf{E}X_n$, поэтому

$$\mathbf{E}X_n \ge \mathbf{E}\left(X_\tau;\ M_n \ge u\right) + \mathbf{E}\left(X_\tau;\ M_n < u\right) \ge$$

$$\ge u\mathbf{P}\left(M_n \ge u\right) + \mathbf{E}\left(X_n;\ M_n < u\right).$$

Следовательно,

$$u\mathbf{P}\left(M_n \ge u\right) \le \mathbf{E}X_n - \mathbf{E}\left(X_n;\ M_n < u\right) = \mathbf{E}\left(X_n;\ M_n \ge u\right) \le \mathbf{E}X_n^+,$$

т.е. соотношение (5) установлено.

Докажем соотношение (6). Положим $\tau = \min\{k \ge 0 : X_k \le -u\} \wedge n$. По замечанию 1 $\mathbf{E}X_\tau \ge \mathbf{E}X_0$, поэтому

$$\mathbf{E}X_0 \le \mathbf{E}\left(X_\tau;\ L_n \le -u\right) + \mathbf{E}\left(X_\tau;\ L_n > -u\right) \le$$

$$\leq -u\mathbf{P}(L_n \leq -u) + \mathbf{E}(X_n;\ L_n > -u).$$

Следовательно,

$$u\mathbf{P}(L_n \leq -u) \leq -\mathbf{E}X_0 + \mathbf{E}(X_n;\ L_n > -u) \leq -\mathbf{E}X_0 + \mathbf{E}X_n^+,$$

т.е. соотношение (6) установлено. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *– мартингал и* $\mathbf{E}|X_n|^p < +\infty$ *при* $n \in \mathbb{N}_0$ *для некоторого* $p \geq 1$. *Тогда при* $n \in \mathbb{N}$, $u > 0$

$$\mathbf{P}(M_n^* \geq u) \leq u^{-p}\mathbf{E}|X_n|^p.$$

Доказательство. Поскольку $\{|X_n|^p, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал, то по теореме 2

$$\mathbf{P}(M_n^* \geq u) = \mathbf{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} |X_k|^p \geq u^p\right) \leq u^{-p}\mathbf{E}|X_n|^p.$$

Следствие доказано.

Пример 4. Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{E}\varkappa_1 = 0$, $\mathbf{E}\varkappa_1^2 := \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Введем случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n \varkappa_i$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – мартингал относительно естественной фильтрации, причем $\mathbf{E}S_n^2 = n\sigma^2 < +\infty$ при $n \in \mathbb{N}_0$. В силу следствия 3

$$\mathbf{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} |S_k| \geq u\right) \leq n\sigma^2/u^2.$$

Это – известное *неравенство Колмогорова* для случайных блужданий.

Установим еще одно неравенство Дуба *для числа пересечений* полосы. Пусть $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – случайная последовательность и $a, b \in \mathbb{R}$, причем $a < b$. Введем марковские моменты

$$\tau_1 = \min\{n \geq 0 : X_n \leq a\},\ \sigma_1 = \min\{n > \tau_1 : X_n \geq b\},$$

$$\tau_2 = \min\{n > \sigma_1 : X_n \leq a\},\ \sigma_2 = \min\{n > \tau_2 : X_n \geq b\}$$

и т.д. Положим при $n \in \mathbb{N}_0$

$$\beta_n(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma_1 > n; \\ \max\{m : \sigma_m \leq n\}, & \text{если } \sigma_1 \leq n. \end{cases}$$

Другими словами, $\beta_n(a,b)$ является числом пересечений последовательностью $\{X_0, X_1, \ldots\}$ полосы (a,b) снизу вверх до момента времени n.

Теорема 3. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *– субмартингал, тогда*

$$\mathbf{E}\beta_n(a,b) \leq \frac{\mathbf{E}(X_n - a)^+}{b-a} \leq \frac{\mathbf{E}X_n^+ + |a|}{b-a}.$$

Доказательство. Ясно, что величина $\beta_n(a,b)$ для последовательности $\{X_0, X_1, \ldots\}$ совпадает с соответствующей величиной $\widetilde{\beta}_n(0, b-a)$ для последовательности $\left\{\widetilde{X}_0, \widetilde{X}_1, \ldots\right\}$, где $\widetilde{X}_n = (X_n - a)^+$. Последовательность

$\left\{\widetilde{X}_0, \widetilde{X}_1, \ldots\right\}$ также является субмартингалом, поскольку функция $f(x) = (x-a)^+$, $x \in \mathbb{R}$, выпукла вниз и не убывает.

Поэтому достаточно показать, что если $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – неотрицательный субмартингал, то при $b > 0$

$$\mathbf{E}\beta_n(0,b) \le \frac{\mathbf{E}X_n}{b}. \tag{7}$$

Положим $\gamma_k = I\{\tau_m < k \le \sigma_m \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\}$ при $k \in \mathbb{N}$. Докажем, что

$$b\beta_n(0,b) \le \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1})\gamma_k. \tag{8}$$

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1})\gamma_k = \sum_{k=1}^{\tau_1} + \sum_{k=\tau_1+1}^{\sigma_1} + \sum_{k=\sigma_1+1}^{\tau_2} + \sum_{k=\tau_2+1}^{\sigma_2} + \sum_{k=\sigma_2+1}^{\tau_3} + \ldots,$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\tau_1} (X_k - X_{k-1})\gamma_k = \sum_{k=1}^{\tau_1} (X_k - X_{k-1}) \cdot 0 = 0,$$

$$\sum_{k=\tau_1+1}^{\sigma_1} (X_k - X_{k-1})\gamma_k = \sum_{k=\tau_1+1}^{\sigma_1} (X_k - X_{k-1}) = X_{\sigma_1} - X_{\tau_1} \ge b,$$

$$\sum_{k=\sigma_1+1}^{\tau_2} (X_k - X_{k-1})\gamma_k = \sum_{k=\sigma_1+1}^{\tau_2} (X_k - X_{k-1}) \cdot 0 = 0,$$

$$\sum_{k=\tau_2+1}^{\sigma_2} (X_k - X_{k-1})\gamma_k = \sum_{k=\tau_2+1}^{\sigma_2} (X_k - X_{k-1}) = X_{\sigma_2} - X_{\tau_1} \ge b,$$

$$\sum_{k=\sigma_2+1}^{\tau_3} (X_k - X_{k-1})\gamma_k = \sum_{k=\sigma_2+1}^{\tau_3} (X_k - X_{k-1}) \cdot 0 = 0$$

и т.д., что и доказывает (8). Далее, при $k \in \mathbb{N}$ по лемме 1

$$\{\gamma_k = 1\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} (\{\tau_m < k\} \setminus \{\sigma_m < k\}) \in \mathcal{F}_{k-1}.$$

Поэтому из (8) находим, что

$$b\mathbf{E}\beta_n(0,b) \le \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[(X_k - X_{k-1})\gamma_k\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[\gamma_k\left(\mathbf{E}(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}\right)\right] \le \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left(\mathbf{E}(X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{E}X_k - \mathbf{E}X_{k-1}) = \mathbf{E}X_n - \mathbf{E}X_0 \le \mathbf{E}X_n,$$

т.е. требуемое соотношение (7) установлено. Теорема доказана.

Используем полученный результат для доказательства *теоремы сходимости* субмартингалов, установленной Дубом. Но сначала докажем следующее утверждение, полезное для нахождения пределов почти наверное.

Лемма 4. *Пусть* ξ *и* η *– случайные величины, заданные на* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. *Пусть* $\mathbf{P}\left(\xi < a < b < \eta\right) = 0$ *для произвольных чисел* a *и* b *таких, что* $a < b$. *Тогда п.н.* $\xi \geq \eta$.

Доказательство. Нетрудно понять, что $\{\xi < \eta\} = \bigcup \{\xi < r_n < s_n < \eta\}$, где объединение берется по всем таким парам рациональных чисел (r_n, s_n), что $r_n < s_n$. По условию леммы $\mathbf{P}\left(\xi < r_n < s_n < \eta\right) = 0$ для каждой пары (r_n, s_n), следовательно, вероятность объединения счетного множества этих событий также равна 0. Итак, $\mathbf{P}\left(\xi < \eta\right) = 0$ и, значит, $\mathbf{P}\left(\xi \geq \eta\right) = 1$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *– субмартингал и* $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{E}\left|X_n\right| < +\infty$. *Тогда п.н. существует* $\lim_{n\to\infty} X_n := X$, *причем* $\mathbf{E}\left|X\right| < +\infty$.

Доказательство. Для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ последовательность $\{\beta_n\left(a, b\right),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ не убывает, следовательно, существует $\lim_{n\to\infty} \beta_n\left(a, b\right) := \beta\left(a, b\right)$. В силу теоремы 3

$$\mathbf{E}\beta_n\left(a, b\right) \leq \frac{\mathbf{E}X_n^+ + |a|}{b - a}$$

и, следовательно, по теореме о монотонной сходимости

$$\mathbf{E}\beta\left(a, b\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\beta_n\left(a, b\right) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbf{E}X_n^+ + |a|}{b - a} \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{E}\left|X_n\right| + |a|}{b - a}.$$

Таким образом, п.н. $\beta\left(a, b\right) < +\infty$ и, значит, $\mathbf{P}\left(\beta\left(a, b\right) = +\infty\right) = 0$. Если же

$$\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n,$$

то $\beta\left(a, b\right) = +\infty$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\left(\liminf_{n\to\infty} X_n < a < b < \limsup_{n\to\infty} X_n\right) \leq \mathbf{P}\left(\beta\left(a, b\right) = +\infty\right) = 0. \tag{9}$$

Из (9) по лемме 4 следует, что п.н. $\liminf_{n\to\infty} X_n \geq \limsup_{n\to\infty} X_n$, т.е. существует п.н. $\lim_{n\to\infty} X_n := X$. По лемме Фату

$$\mathbf{E}\left|X\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{E}\left|X_n\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{E}\left|X_n\right| < +\infty.$$

Теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть* $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *– неотрицательный супермартингал. Тогда п.н. существует* $\lim_{n\to\infty} X_n := X$, *причем* $\mathbf{E}X < +\infty$.

Доказательство. Последовательность $\{-X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал. Ясно, что $\mathbf{E}\left|X_n\right| = \mathbf{E}X_n \leq \mathbf{E}X_0$ при $n \in \mathbb{N}_0$ и, значит, $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbf{E}\left|-X_n\right| < +\infty$. Следовательно, по теореме 4 существует п.н. $\lim_{n\to\infty}\left(-X_n\right) := \left(-X\right)$, причем $\mathbf{E}\left|-X\right| < +\infty$. Утверждение доказано.

Пример 5. Пусть $\{Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона и $m := \mathbf{E}Z_1 \in (0, +\infty)$. Как известно, последовательность $\{Z_n/m^n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является мартингалом относительно естественной фильтрации. По следствию 4 существует п.н. $\lim_{n\to\infty} Z_n/m^n := Y$. Ясно, что $\{Y > 0\} \subset \{T = +\infty\}$. Если $m \leq 1$, то, напомним, $\mathbf{P}\,(T = +\infty) = 0$ и, значит, $\mathbf{P}\,(Y > 0) = 0$, т.е. $Y = 0$ п.н. Если $m > 1$, то, напомним, что $\mathbf{P}\,(T = +\infty) > 0$. Можно показать, что в этом случае $\mathbf{P}\,(Y > 0) = \mathbf{P}\,(T = +\infty)$ и, значит, $\mathbf{P}\,(Y > 0) > 0$.