Лекция 11

Мартингалы

Пусть случайная последовательность такова, что все ее элементы, относящиеся к будущему, имеют одно и то же условное относительно настоящего и прошлого математическое ожидание, совпадающее с элементом, относящимся к настоящему. Такая последовательность называется *мартингалом.* На первый взгляд предложенное определение кажется слишком ограничительным, однако *класс мартингалов* оказался достаточно широким и важным с точки зрения приложений. Мартингалы были введены и изучены известным американским математиком Дж. Дубом.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Сначала напомним определение условного математического ожидания. Пусть ξ – случайная величина, причем $\mathbf{E}\,|\xi| < +\infty$. Случайная величина η называется *условным математическим ожиданием* (у.м.о.) случайной величины ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, если 1) η является измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{G}$ и 2) $\mathbf{E}\,(\xi;\ A) = \mathbf{E}\,(\eta;\ A)$ для произвольного множества $A \in \mathcal{G}$. Для у.м.о. используется обозначение $\mathbf{E}\,(\xi \mid \mathcal{G})$.

Описательно говоря, условное математическое ожидание – это более "грубая" случайная величина (измеримая относительно более "грубой" σ-алгебры), чем исходная, но при этом она сохраняет информацию о среднем значении исходной случайной величины по всем множествам из "грубой" σ-алгебры.

Отметим, что у.м.о. $\mathbf{E}\,(\xi \mid \mathcal{G})$ (в предположении, что $\mathbf{E}\,|\xi| < +\infty$) существует. Помимо стандартных свойств, присущих обычному математическому ожиданию, у.м.о. обладает некоторыми *специфическими свойствами*:

1) если $\mathbf{E}\,|\xi| < +\infty$, то $\mathbf{E}\,(\mathbf{E}\,(\xi \mid \mathcal{G})) = \mathbf{E}\xi$;

2) если случайная величина ξ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{G}$ и $\mathbf{E}\,|\xi| < +\infty$, то $\mathbf{E}\,(\xi \mid \mathcal{G}) = \mathbf{E}\xi$;

3) если $\mathbf{E}\,|\xi| < +\infty$ и $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ – σ-алгебры, причем $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$, то $\mathbf{E}\,(\mathbf{E}\,(\xi \mid \mathcal{G}_2) \mid \mathcal{G}_1) = \mathbf{E}\,(\xi \mid \mathcal{G}_1)$;

4) пусть ξ, η – случайные величины, причем η измерима относительно $\mathcal{G}$, тогда

$$\mathbf{E}\,(\xi\eta \mid \mathcal{G}) = \eta\mathbf{E}\,(\xi \mid \mathcal{G})$$

(предполагается, что $\mathbf{E}\,|\xi\eta| < +\infty$ и $\mathbf{E}\,|\xi| < +\infty$);

5) пусть $f\,(x, y)$ – измеримая числовая функция от $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; пусть ξ, η – случайные величины, причем η измерима относительно $\mathcal{G}$, тогда

$$\mathbf{E}\,(\,f\,(\xi, \eta) \mid \mathcal{G}) = \mathbf{E}\,(\,f\,(\xi, y) \mid \mathcal{G})\big|_{y=\eta}$$

(запись в правой части означает, что сначала для каждого фиксированного y ищется условное математическое ожидание случайной величины $f\,(\xi, y)$, а затем в полученный результат вместо y подставляется случайная величина η; при этом предполагается, что $\mathbf{E}\,|f\,(\xi, \eta)| < +\infty$ и $\mathbf{E}\,|f\,(\xi, y)| < +\infty$ для каждого фиксированного y).

Назовем *фильтрацией* последовательность таких σ-алгебр $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}_0$, что $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_m$ при $n \le m$ $(n, m \in \mathbb{N}_0)$. Говорят, что случайная последовательность $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *согласована* с фильтрацией $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, если для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ случайная величина X_n измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n$.

Определение 1. Случайная последовательность $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *мартингалом* относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, если

1) случайная последовательность $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ согласована с фильтрацией $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$;

2) $\mathbf{E}\,|X_n| < +\infty$ при $n \in \mathbb{N}_0$;

3) при $n \le m$ и $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{E}\left(X_m \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n. \tag{1}$$

Отметим, что иногда мартингал обозначают $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Суть соотношения (1) состоит в том, что если по известному прошлому и настоящему искать условное математическое ожидание элементов последовательности, относящихся к будущему, то достаточно знать только настоящее. Это напоминает нам определение марковской цепи, но там речь идет о распределении, а здесь о математическом ожидании.

Заметим, что (1) выполняется, если при $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n. \tag{2}$$

Покажем, например, что

$$\mathbf{E}\left(X_{n+2} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n. \tag{3}$$

Действительно, из (2) вытекает, что

$$\mathbf{E}\left(X_{n+2} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) = X_{n+1}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X_{n+2} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = X_n. \tag{4}$$

Поскольку $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, то в силу свойства 3) у.м.о.

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{E}\left(X_{n+2} \mid \mathcal{F}_{n+1}\right) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(X_{n+2} \mid \mathcal{F}_n\right). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует требуемое соотношение (3).

Замечание 1. Определение мартингала $\{X(t),\ t \ge 0\}$ (с непрерывным временем) относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$ аналогично определению 1. В частности, соотношение (1) заменяется на следующее: при $0 \le s \le t$

$$\mathbf{E}\left(X(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = X(s).$$

Примеры мартингалов. а) *Случайное блуждание с нулевым сносом.* Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{E}\varkappa_1 = 0$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i$, $n \in \mathbb{N}$. Случайная последовательность $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является мартингалом относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_0, \ldots, S_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Действительно,

$$\mathbf{E}(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(S_n + \varkappa_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) =$$

$$= \mathbf{E}(S_n \mid \mathcal{F}_n) + \mathbf{E}(\varkappa_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n.$$

Мы воспользовались тем, что случайная величина S_n измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n$, а случайная величина $\varkappa_{n+1}$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_n$ и, следовательно, по свойству 2) у.м.о. $\mathbf{E}(\varkappa_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}\varkappa_{n+1} = 0$. Итак, выполнено соотношение (2).

б) *Случайное блуждание в показателе экспоненты.* Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, причем $\mathbf{E}\xi_i = a_i$, где a_i конечно и не равно 0 (при всех $i \in \mathbb{N}$). Тогда последовательность

$$X_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{a_i}, \quad n \in \mathbb{N},$$

образует мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Действительно, по свойству 4) у.м.о.

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{a_i} \mathbf{E}\left(\frac{\xi_{n+1}}{a_{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right) = X_n \mathbf{E}\left(\frac{\xi_{n+1}}{a_{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right)$$

и по свойству 2) у.м.о.

$$\mathbf{E}\left(\frac{\xi_{n+1}}{a_{n+1}} \,\middle|\, \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\frac{\xi_{n+1}}{a_{n+1}} = 1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n.$$

Интересен частный случай, когда $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $a := \mathbf{E}\exp(\varkappa_1) < +\infty$, и $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность

$$X_n = \frac{e^{S_n}}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

образует мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_0, \ldots, S_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

в) *Ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона.* Пусть $\{Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, причем $m := \mathbf{E}Z_1 \in (0, +\infty)$. Тогда случайная последовательность $\{Z_n/m^n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является мартингалом относительно естественной фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{Z_0, \ldots, Z_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ (напомним, что m – математическое ожидание численности непосредственного потомства одной частицы). Действительно, пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ – размеры потомства в $(n+1)$-ом поколении от первой, второй и т.д. частиц n-го поколения. Тогда $Z_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{Z_n}$, причем $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ – независимые случайные величины и последовательность $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ не зависит от $\mathcal{F}_n$. Пусть $A \in \mathcal{F}_n$, тогда

$$\mathbf{E}\left(\frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}};\ A\right) = \mathbf{E}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{Z_n}}{m^{n+1}};\ A\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k}{m^{n+1}};\ A \cap \{Z_n = k\} \right).$$

Так как случайная величина $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$ не зависит от события $A \cap \{Z_n = k\}$, то

$$\mathbf{E} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k}{m^{n+1}};\ A \cap \{Z_n = k\} \right) =$$

$$= \mathbf{E} \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k}{m^{n+1}} \right) \mathbf{P} \left(A \cap \{Z_n = k\} \right) =$$

$$= \frac{km}{m^{n+1}} \mathbf{P} \left(A \cap \{k = Z_n\} \right) = \frac{k}{m^n} \mathbf{P} \left(A \cap \{Z_n = k\} \right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{E} \left(\frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}};\ A \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{m^n} \mathbf{P} \left(A \cap \{Z_n = k\} \right) = \mathbf{E} \left(\frac{Z_n}{m^n};\ A \right),$$

что требовалось доказать.

г) *Броуновское движение.* Пусть $\{W(t),\ t \geq 0\}$ – броуновское движение. Введем естественную фильтрацию $\mathcal{F}_t = \sigma \{W(s),\ 0 \leq s \leq t\}$, $t \geq 0$. Относительно этой фильтрации мартингалами являются 1) само броуновское движение, 2) процесс $\left\{W^2(t) - t,\ t \geq 0\right\}$ и 3) при каждом $u \in \mathbb{R}$ процесс $\left\{\exp\left(uW(t) - u^2 t/2\right),\ t \geq 0\right\}$. Рассмотрим, например, процесс 2). По определению броуновского движения $\mathbf{E}W^2(t) = t$ и, значит, $\mathbf{E}W^2(t) < +\infty$ при $t \geq 0$. Заметим, что при $0 \leq s \leq t$

$$W^2(t) = \left[W(s) + (W(t) - W(s))\right]^2 =$$

$$= W^2(s) + 2W(s)(W(t) - W(s)) + (W(t) - W(s))^2,$$

поэтому

$$\mathbf{E}\left(W^2(t)\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(W^2(s)\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) +$$

$$+2\mathbf{E}\left(W(s)(W(t) - W(s))\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) + \mathbf{E}\left((W(t) - W(s))^2\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) =$$

$$= W^2(s) + 2W(s)\mathbf{E}\left((W(t) - W(s))\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) + \mathbf{E}\left((W(t) - W(s))^2\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) \quad (6)$$

(здесь использовано то, что случайная величина $W(s)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_s$). Поскольку броуновское движение – процесс с независимыми приращениями, то случайная величина $W(t) - W(s)$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_s$ и, следовательно,

$$\mathbf{E}\left(W(t) - W(s)\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(W(t) - W(s)\right) = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{E}\left((W(t) - W(s))^2\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(W(t) - W(s)\right)^2 = t - s. \quad (8)$$

Из соотношений (6)-(8) находим, что

$$\mathbf{E}\left(W^2(t) - t\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) = \mathbf{E}\left(W^2(t)\ \middle|\ \mathcal{F}_s\right) - t =$$

$$= W^2(s) + (t - s) - t = W^2(s) - s,$$

что требовалось показать.

Определение 2. Случайная последовательность $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ называется *субмартингалом* относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, если

1) случайная последовательность $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ согласована с фильтрацией $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$;

2) $\mathbf{E}|X_n| < +\infty$ при $n \in \mathbb{N}_0$;

3) при $n \le m$ и $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{E}\left(X_m \mid \mathcal{F}_n \right) \ge X_n. \tag{9}$$

Аналогично определяется супермартингал, но только в (9) вместо символа $\ge$ надо использовать символ $\le$. Отметим, что если $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал, то $\{-X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – супермартингал.

Теорема 1. *Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – мартингал и $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, – выпуклая вниз числовая функция, причем $\mathbf{E}|f(X_n)| < +\infty$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Тогда $\{f(X_n), \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал. Если при этом функция f не убывает, то утверждение верно и в случае, когда $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал.*

Доказательство. Так как функция выпукла вниз, ее график находится не ниже опорной прямой в произвольной точке x_0, т.е. при всех $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) \ge f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0)$$

(здесь $f'_+(x_0)$ – производная справа) и, следовательно, при $n \le m$ и $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$f(X_m) \ge f(X_n) + f'_+(X_n)(X_m - X_n).$$

Откуда, переходя к условным математическим ожиданиям, получаем, что

$$\mathbf{E}\left(f(X_m) \mid \mathcal{F}_n \right) \ge \mathbf{E}\left(f(X_n) \mid \mathcal{F}_n \right) + \mathbf{E}\left(f'_+(X_n)(X_m - X_n) \;\middle|\; \mathcal{F}_n \right) =$$

$$= f(X_n) + f'_+(X_n)\,\mathbf{E}\left(X_m - X_n \mid \mathcal{F}_n \right). \tag{10}$$

Если $\{X_n\}$ – мартингал, то $\mathbf{E}\left(X_m - X_n \mid \mathcal{F}_n \right) = \mathbf{E}\left(X_m \mid \mathcal{F}_n \right) - X_n = 0$ и, следовательно, правая часть соотношения (10) равна $f(X_n)$. Если же $\{X_n\}$ – субмартингал и функция f не убывает, то $\mathbf{E}\left(X_m - X_n \mid \mathcal{F}_n \right) \ge 0$ и $f'_+(X_n) \ge 0$ и, следовательно, правая часть соотношения (10) не меньше $f(X_n)$. Теорема доказана.

Примеры субмартингалов. а) *Случайное блуждание с положительным сносом.* Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{E}\varkappa_1 > 0$. Положим $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ является субмартингалом относительно фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_0, \ldots, S_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. Действительно, при $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{E}\left(S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \right) = \mathbf{E}\left(S_n + \varkappa_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \right) =$$

$$= \mathbf{E}\left(S_n \mid \mathcal{F}_n \right) + \mathbf{E}\left(\varkappa_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \right) = S_n + \mathbf{E}\varkappa_{n+1} > S_n.$$

б) Если $\{Z_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, причем $m := \mathbf{E}Z_1 \in (0, +\infty)$ и $\mathbf{E}Z_1^2 < +\infty$, то последовательность $\left\{Z_n^2/m^{2n},\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$

– субмартингал относительно естественной фильтрации (можно показать, что $\mathbf{E}Z_n^2 < +\infty$ при $n \in \mathbb{N}$, если $\mathbf{E}Z_1^2 < +\infty$).

в) В общем случае, если $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – мартингал и $\mathbf{E}\,|X_n|^p < +\infty$ при $n \in \mathbb{N}_0$ для некоторого $p \geq 1$, то последовательность $\{|X_n|^p, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал; если же $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал и $\mathbf{E}\exp(X_n) < +\infty$ при $n \in \mathbb{N}_0$, то $\{\exp(X_n), \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал.

Говорят, что случайная последовательность $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ *предсказуема* относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ случайная величина A_n измерима не только относительно $\mathcal{F}_n$, но и относительно $\mathcal{F}_{n-1}$.

Теорема 2 (Дуб). *Пусть $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал, тогда существует мартингал $\{M_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ и предсказуемая относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ неубывающая случайная последовательность $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ с $A_0 = 0$, такие что п.н. при $n \in \mathbb{N}_0$*

$$X_n = M_n + A_n. \tag{11}$$

Указанное разложение п.н. единственно.

Доказательство. Положим при $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta X_n = X_n - X_{n-1}, \qquad \Delta A_n = \mathbf{E}\left(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right), \qquad A_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k.$$

Поскольку $\{X_n, \mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ – субмартингал, то п.н. $\Delta A_n \geq 0$ при $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, последовательность $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ не убывает. Кроме того, случайная величина ΔA_n измерима относительно $\mathcal{F}_{n-1}$ и, значит, случайная величина A_n измерима относительно $\mathcal{F}_{n-1}$. Покажем, что последовательность $M_n := X_n - A_n$ при $n \in \mathbb{N}$ является мартингалом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Действительно, при $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}\left(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{E}\left(X_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
= \mathbf{E}\left(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) - \mathbf{E}\left(A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) = \\
= \mathbf{E}\left(\Delta X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) + \mathbf{E}\left(X_n \mid \mathcal{F}_n\right) - A_{n+1} = \\
= \Delta A_{n+1} + X_n - A_{n+1} = X_n - A_n = M_n.
\end{gathered}$$

Итак, представление (11) установлено.

Пусть представление (11) справедливо. Положим $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$, $\Delta A_n = A_n - A_{n-1}$ при $n \in \mathbb{N}$, тогда $\Delta X_n = \Delta M_n + \Delta A_n$, $\mathbf{E}\left(\Delta M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = 0$ и $\mathbf{E}\left(\Delta A_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \Delta A_n$. Следовательно, при $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{E}\left(\Delta X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \mathbf{E}\left(\Delta M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) + \mathbf{E}\left(\Delta A_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \Delta A_n.$$

Таким образом, при $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left(\Delta X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}\right),$$

т.е. последовательность $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$ восстанавливается п.н. однозначно по последовательности $\{X_n,\ n \in \mathbb{N}_0\}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Разложение Дуба справедливо для произвольной согласованной с фильтрацией $\{\mathcal{F}_n\}$ случайной последовательности $\{X_n\}$. В этом случае $\{A_n\}$ – предсказуемая относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_n\}$ случайная последовательность.