Лекция 10

Свойства броуновского движения и его связь со случайным блужданием

Изучим свойства броуновского движения $\{W(t),\ t \geq 0\}$.

Утверждение 1 (автомодельность). *При любом фиксированном $a > 0$ случайный процесс $\{W(at)/\sqrt{a},\ t \geq 0\}$ является броуновским движением.*

Доказательство. Траектории этого процесса непрерывны и характеристическая функция случайного вектора $(W(at_1), \ldots, W(at_m))/\sqrt{a}$ (при $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m$) равна по теореме 1 прошлой лекции

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\lambda_k}{\sqrt{a}}\min(at_k, at_l)\frac{\lambda_l}{\sqrt{a}}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k \min(t_k, t_l)\lambda_l\right),$$

т.е. совпадает с характеристической функцией вектора $(W(t_1), \ldots, W(t_m))$, следовательно,

$$(W(at_1), \ldots, W(at_m))/\sqrt{a} \stackrel{d}{=} (W(t_1), \ldots, W(t_m)).$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2 (симметрия). *Процесс $\{-W(t),\ t \geq 0\}$ является броуновским движением.*

Утверждение 3 (инверсия). *Процесс $\{tW(1/t)/,\ t \geq 0\}$ (считаем, что он равен 0 при $t = 0$) является броуновским движением.*

Доказательство. Траектории этого процесса непрерывны (докажите сами непрерывность в точке $t = 0$). Характеристическая функция вектора $(t_1 W(1/t_1), \ldots, t_m W(1/t_m))$ равна по теореме 1 предыдущей лекции

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k t_k \min\left(\frac{1}{t_k}, \frac{1}{t_l}\right)\lambda_l t_l\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k \min\left(\frac{t_k t_l}{t_k}, \frac{t_k t_l}{t_l}\right)\lambda_l\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\lambda_k \min(t_k, t_l)\lambda_l\right),$$

т.е. совпадает с характеристической функцией вектора $(W(t_1), \ldots, W(t_m))$, следовательно,

$$(t_1 W(1/t_1), \ldots, t_m W(1/t_m)) \stackrel{d}{=} (W(t_1), \ldots, W(t_m)).$$

Утверждение доказано.

Обсудим свойства траекторий броуновского движения. Известно, что они являются непрерывными. Напомним, что разбиением отрезка $[0,1]$ называется совокупность точек $t_0, t_1, \ldots, t_m$ таких, что $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$, $m \in \mathbb{N}$. *Вариацией* функции $x(t)$, $t \in [0,1]$, называется выражение $Var(x) := \sup \sum_{k=0}^{m-1} |x(t_{k+1}) - x(t_k)|$, где супремум берется по всем разбиениям отрезка $[0,1]$. Очевидно, что если x является непрерывно дифференцируемой функцией, то $Var(x) < +\infty$. Следующее утверждение означает, что п.н. траектории броуновского движения не являются непрерывно дифференцируемыми.

Теорема 1. *С вероятностью* 1

$$Var(W) = +\infty.$$

Доказательство. Пусть $t_k = k\delta$, где $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Положим

$$\zeta_m = \sum_{k=0}^{m-1} \left(W(t_{k+1}) - W(t_k)\right)^2. \tag{1}$$

Покажем, что при $m \to \infty$

$$\zeta_m \xrightarrow{P} 1. \tag{2}$$

Заметим, что если $\xi \sim N(0, \sigma^2)$, то $\mathbf{E}\xi^2 = \sigma^2$, $\mathbf{E}\xi^4 = 3\sigma^4$ и, значит, $\mathbf{D}(\xi^2) = \mathbf{E}\xi^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$. Поэтому, учитывая независимость слагаемых в правой части (1), находим, что

$$\mathbf{E}\zeta_m = \sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k) = 1, \ \mathbf{D}\zeta_m = 2\sum_{k=0}^{m-1} (t_{k+1} - t_k)^2 = 2m\delta^2 = \frac{2}{m}.$$

Следовательно, по неравенству Чебышева при $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(|\zeta_m - 1| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{D}\zeta_m}{\varepsilon^2} \leq \frac{2}{\varepsilon^2 m} \to 0, \qquad m \to \infty.$$

Соотношение (2) доказано.

Теперь заметим, что

$$\zeta_m \leq Var(W) \max_{k \in \{0,1,\ldots,m-1\}} |W(t_{k+1}) - W(t_k)|.$$

Из соотношения (2) следует, что п.н. $\zeta_{m_l} \to 1$ при $l \to \infty$ для некоторой подпоследовательности $\{m_l\}$, а $\max_{k \in \{0,1,\ldots,m_l-1\}} |W(t_{k+1}) - W(t_k)| \to 0$ при $l \to \infty$ (в силу непрерывности траекторий броуновского движения). Откуда следует утверждение теоремы.

Установим связь между случайными блужданиями и броуновским движением W. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 := \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Введем случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Справедлива центральная предельная теорема: при $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N,$$

где $N \sim N(0,1)$.

По $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ определим случайный процесс с непрерывным временем: $Y(t) = S_{\lfloor t \rfloor}$, $t \geq 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем случайный процесс Y_n:

$$Y_n(t) = \frac{Y(nt)}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},\ t \geq 0.$$

Траектории этого процесса представляют собой ступеньки шириной $1/n$ и высотой $S_k/(\sigma\sqrt{n})$, $k \in \mathbb{N}_0$. Отметим, что процесс $\{Y_n(t),\ t \geq 0\}$ имеет независимые приращения.

Определение 1. Говорят, что последовательность случайных процессов Z_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится к случайному процессу Z *в смысле конечномерных распределений* (обозначение: $Z_n \Rightarrow Z$), если для произвольных $m \in \mathbb{N}$ и $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ при $n \to \infty$

$$(Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_m)) \xrightarrow{D} (Z(t_1), \ldots, Z(t_m)).$$

Теорема 2. *Если* $\mathbf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathbf{D}X_1 := \sigma^2 \in (0, +\infty)$, *то при* $n \to \infty$

$$Y_n \Rightarrow W.$$

Доказательство. По теореме непрерывности для характеристических функций достаточно установить, что при $m \in \mathbb{N}$ и $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{m} \lambda_k Y_n(t_k)\right) = \varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \tag{3}$$

где $\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ – характеристическая функция случайного вектора $(W(t_1), \ldots, W(t_m))$. Известно, что

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}^2 (t_k - t_{k-1})\right),$$

где $\lambda_{k,m} = \sum_{l=k}^{m} \lambda_l$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$.

При $k \in \{1, \ldots, m\}$ положим $\Delta_{k,n} = Y_n(t_k) - Y_n(t_{k-1})$ и заметим, что $Y_n(t_k) = \sum_{l=1}^{k} \Delta_{l,n}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k Y_n(t_k) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{l=1}^{k} \Delta_{l,n} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m} \Delta_{k,n}.$$

Поскольку процесс $\{Y_n(t),\ t \geq 0\}$ имеет независимые приращения, то случайные величины $\Delta_{1,n}, \ldots, \Delta_{m,n}$ независимы и, следовательно,

$$\mathbf{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{m} \lambda_k Y_n(t_k)\right) = \mathbf{E}\exp\left(i\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}\Delta_{k,n}\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{E}\exp\left(i\lambda_{k,m}\Delta_{k,n}\right). \tag{4}$$

В силу центральной предельной теоремы при $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\Delta_{k,n} = \frac{S_{\lfloor nt_k \rfloor} - S_{\lfloor nt_{k-1} \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} \overset{d}{=} \frac{S_{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{S_{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor}}{\sigma\sqrt{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor}} \sqrt{\frac{\lfloor nt_k \rfloor - \lfloor nt_{k-1} \rfloor}{n}} \xrightarrow{D} \sqrt{t_k - t_{k-1}} N$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \exp\left(i\lambda_{k,m}\Delta_{k,n}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{k,m}^2 \left(t_k - t_{k-1}\right)\right). \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) следует (3). Теорема доказана.

По $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ определим еще один случайный процесс с непрерывным временем, используя линейную интерполяцию:

$$\widehat{S}\left(t\right) = S_{\lfloor t \rfloor} + \left(t - \lfloor t \rfloor\right)\left(S_{\lfloor t \rfloor + 1} - S_{\lfloor t \rfloor}\right), \quad t \geq 0.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ введем случайный процесс $\widehat{Y}_n$:

$$\widehat{Y}_n\left(t\right) = \frac{\widehat{S}\left(nt\right)}{\sigma\sqrt{n}}, \quad t \geq 0.$$

Траектории этого процесса представляют собой ломаные, соединяющие точки $\left(k/n, S_k/\left(\sigma\sqrt{n}\right)\right)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Аналогично теореме 2 можно доказать, что если выполнены ее условия, то при $n \to \infty$

$$\widehat{Y}_n \Rightarrow W.$$

Это соотношение говорит о близости конечномерных распределений процессов W и $\widehat{Y}_n$ при больших n. Это наводит на мысль, что близкими должны быть и распределения функционалов от этих процессов (будем считать их заданными на отрезке $[0, 1]$). Следующий результат, полученный американским математиком Донскером, получил название *принципа инвариантности.* Обозначим $C\left[0, 1\right]$ пространство функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим на $C\left[0, 1\right]$ метрику равномерной сходимости: при $x, y \in C\left[0, 1\right]$

$$\rho\left(x, y\right) = \sup_{t\in[0,1]} \left|x\left(t\right) - y\left(t\right)\right|.$$

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{D}X_1 =: \sigma^2 \in (0, +\infty)$ *и пусть* f – *функционал, заданный на* $C\left[0, 1\right]$ *и непрерывный в метрике равномерной сходимости. Тогда при* $n \to \infty$

$$f\left(Y_n\right) \xrightarrow{D} f\left(W\right). \tag{6}$$

Рассмотрим в качестве примера функционал $f\left(x\right) = \sup_{t\in[0,1]} x\left(t\right)$ при $x \in C\left[0, 1\right]$. Этот функционал непрерывен при всех $x \in C\left[0, 1\right]$. Положим

$$M_n = \max_{0\leq i\leq n} S_i, \qquad M = \sup_{t\in[0,1]} W\left(t\right).$$

Заметим, что

$$\sup_{t\in[0,1]} \widehat{Y}_n\left(t\right) = \frac{\max_{0\le i\le n} S_i}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}}.$$

В силу (6) при $n \to \infty$

$$\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} M. \tag{7}$$

Чтобы найти распределение предельной случайной величины, воспользуемся следующим соображением. Из соотношения (7) следует, что для произвольного случайного блуждания с нулевым сносом и конечной дисперсией σ^2 при произвольном $x \ge 0$ (за исключением не более чем счетного множества)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \mathbf{P}\left(M \le x\right). \tag{8}$$

Следовательно, соотношение (8) справедливо и для *простого* случайного блуждания, определяемого соотношением

$$\mathbf{P}\left(X_1 = 1\right) = \mathbf{P}\left(X_1 = -1\right) = 1/2.$$

Для этого блуждания левую часть соотношения (8) можно найти непосредственно.

Лемма 1. *Пусть случайная величина X_1 принимает значение 1 с вероятностью $1/2$ и значение -1 с той же вероятностью. Тогда при $x \ge 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du. \tag{9}$$

Доказательство. Очевидно, что при $x \ge 0$

$$\mathbf{P}\left(M_n \ge x\right) = \mathbf{P}\left(S_n = x\right) + \mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \ge x\right) + \mathbf{P}\left(S_n < x,\ M_n \ge x\right). \tag{10}$$

Заметим, что при $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \ge x\right) = \mathbf{P}\left(S_n < x,\ M_n \ge x\right). \tag{11}$$

Действительно, чтобы найти вероятность, например, первого из этих событий, требуется найти число траекторий случайного блуждания в интервале времени от 0 до n, удовлетворяющих неравенствам $S_n > x$ и $M_n \ge x$, и затем умножить это число на вероятность одной траектории, т.е. 2^{-n}. Но число траекторий, удовлетворяющих неравенствам $S_n > x$ и $M_n \ge x$, совпадает с числом траекторий, удовлетворяющих неравенствам $S_n < x$ и $M_n \ge x$. В самом деле, если $M_n \ge x$, то момент τ_x первого достижения траекторией уровня x не превосходит n; число траекторий, ведущих за время $n - \tau_x$ из точки x в точки, лежащие не ниже x, совпадает с числом траекторий, ведущих в точки, лежащие не выше x. Далее, при $x \ge 0$

$$\mathbf{P}\left(S_n > x,\ M_n \ge x\right) = \mathbf{P}\left(S_n > x\right). \tag{12}$$

Из соотношений (10)-(12) получаем, что при $x \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(M_n \geq x\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n > x\right) + \mathbf{P}\left(S_n = x\right) = 2\mathbf{P}\left(S_n \geq x\right) - \mathbf{P}\left(S_n = x\right). \quad (13)$$

Поскольку случайные величины M_n и S_n целочисленны, то учитывая (13), находим, что при $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) = \mathbf{P}\left(M_n > \sigma\sqrt{n}x\right) = \mathbf{P}\left(M_n \geq \lfloor \sigma\sqrt{n}x \rfloor + 1\right) =$$

$$= 2\mathbf{P}\left(S_n \geq \lfloor \sigma\sqrt{n}x \rfloor + 1\right) - \mathbf{P}\left(S_n = \lfloor \sigma\sqrt{n}x \rfloor + 1\right) =$$

$$= 2\mathbf{P}\left(S_n > \sigma\sqrt{n}x\right) - \mathbf{P}\left(S_n = \lfloor \sigma\sqrt{n}x \rfloor + 1\right). \quad (14)$$

По центральной предельной теореме

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_n > \sigma\sqrt{n}x\right) = 1 - \Phi\left(x\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_n = \lfloor \sigma\sqrt{n}x \rfloor + 1\right) = 0, \quad (15)$$

где $\Phi\left(x\right)$ – функция Лапласа (второе равенство в (15) докажите сами). Из (14) и (15) следует, что при $x \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} > x\right) = 2\left(1 - \Phi\left(x\right)\right)$$

или, что равносильно,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{M_n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = 2\Phi\left(x\right) - 1.$$

Осталось заметить, что

$$2\Phi\left(x\right) - 1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *При* $x \geq 0$

$$\mathbf{P}\left(M \leq x\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du. \quad (16)$$

Доказательство. Из (8) и (9) вытекает, что соотношение (16) справедливо при $x \geq 0$, за исключением не более чем счетного множества. Поскольку обе части соотношения (16) непрерывны справа, оно справедливо при всех $x \geq 0$. Теорема доказана.