Лекция 9

Броуновское движение и его существование

Приступим к изучению одного из важнейших случайных процессов, получившего название *броуновское движение*. Как известно, броуновским движением в физике называется хаотическое движение микрочастицы, взвешенной в воде, в результате столкновений этой частицы с молекулами воды. В изучение математической модели броуновского движения внесли весомый вклад основатель стохастической финансовой математики Бошалье, великий физик Эйнштейн, создатель кибернетики Винер, выдающийся французский математик П. Леви.

Определение 1. *Броуновским движением* называется случайный процесс $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

1) $W(0) = 0$;

2) W является процессом с независимыми приращениями, т.е. для каждого набора чисел $t_1, \ldots, t_m$ $(0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m)$, $m \in \mathbb{N}$, случайные величины $W(t_1) - W(0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ независимы;

3) приращения процесса W распределены нормально: $W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$ для произвольных чисел t_1, t_2 $(0 \leq t_1 < t_2)$.

Наша задача – найти конечномерные распределения этого процесса (вопрос о его существовании решим позже). Воспользуемся аппаратом характеристических функций.

Характеристическую функцию случайного вектора $(W(t_1), \ldots, W(t_m))$ при $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ и $m \in \mathbb{N}$ обозначим $\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. По определению характеристической функции при $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k W(t_k)\right),$$

где i – мнимая единица. Условимся, что $t_0 = 0$. Положим $\Delta_k = W(t_k) - W(t_{k-1})$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$. Заметим, что по определению броуновского движения случайные величины $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ независимы, $\Delta_k \sim N(0, t_k - t_{k-1})$ и $W(t_k) = \sum_{l=1}^{k} \Delta_l$ при $k \in \{1, \ldots, m\}$. В силу сказанного

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sum_{l=1}^{k} \Delta_l\right) = \mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m} \Delta_k\right). \quad (1)$$

где $\lambda_{k,m} = \sum_{l=k}^{m} \lambda_l$, $k \in \{1, \ldots, m\}$. Воспользуемся независимостью случайных величин $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$:

$$\mathbf{E} \exp\left(i \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m} \Delta_k\right) = \prod_{k=1}^{m} \mathbf{E} \exp\left(i \lambda_{k,m} \Delta_k\right). \quad (2)$$

Теперь используем тот факт, что если случайная величина ξ нормально распределена, $\xi \sim N\left(0, \sigma^2\right)$, то $\mathbf{E} \exp\left(i\lambda\xi\right) = \exp\left(-\lambda^2\sigma^2/2\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\prod_{k=1}^{m} \mathbf{E} \exp\left(i\lambda_{k,m}\Delta_k\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}^2 \frac{t_k - t_{k-1}}{2}\right). \tag{3}$$

Из соотношений (1)-(3) следует, что

$$\varphi_{t_1,\ldots,t_m}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}^2 \frac{t_k - t_{k-1}}{2}\right). \tag{4}$$

Напомним, что случайный вектор $\left(\xi_1, \ldots, \xi_m\right)$ имеет многомерное нормальное распределение с вектором средних $\left(a_1, \ldots, a_m\right)$ и ковариационной матрицей $A = \{a_{k,l}\}$ размера $m \times m$ (которая должна быть симметричной и неотрицательно определенной), если характеристическая функция этого вектора имеет вид $\exp\left(i\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k - \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \lambda_k a_{k,l}\lambda_l/2\right)$. В следующей теореме указаны конечномерные распределения броуновского движения.

Теорема 1. *Случайный вектор* $\left(W\left(t_1\right), \ldots, W\left(t_m\right)\right)$ *при* $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m$ *имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей* $A = \{a_{k,l}\}$, *где* $a_{k,l} = \min\left(t_k, t_l\right)$, $k, l \in \{1, \ldots, m\}$.

Доказательство. Нетрудно понять, что

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} \lambda_k a_{k,l}\lambda_l = 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=k}^{m} \lambda_k t_k \lambda_l - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 t_k = 2\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \lambda_{k,m} t_k - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2 t_k =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m} \left(\lambda_k - \lambda_{k,m}\right)^2 t_k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}^2 t_k = -\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_{k+1,m}^2 t_k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}^2 t_k =$$

$$= -\sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}^2 t_{k-1} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}^2 t_k = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{k,m}^2 \left(t_k - t_{k-1}\right), \tag{5}$$

т.е. характеристическая фукция вектора $\left(W\left(t_1\right), \ldots, W\left(t_m\right)\right)$ совпадает с характеристической функцией указанного в формулировке теоремы нормального распределения, откуда следует совпадение соответствующих распределений. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1 следует, что броуновское движение можно определить другим способом.

Определение 2. *Процесс* $W = \{W\left(t\right),\ t \geq 0\}$ *называется броуновским движением, если*

1) $W\left(0\right) = 0$;

2) конечномерные распределения являются нормальными;

3) $\mathbf{E}W\left(t\right) = 0$ при $t \geq 0$ и $\mathbf{cov}\left(W\left(t\right), W\left(s\right)\right) = \mathbf{E}W\left(t\right)W\left(s\right) = \min\left(t, s\right)$ при $t, s \geq 0$.

Определения 1 и 2 эквивалентны. Действительно, эквивалентность означает, что совпадают конечномерные распределения процессов из первого и второго определений, т.е. совпадают характеристические функции этих распределений, но это уже сделано (см. соотношение (5)).

Случайные процессы, все конечномерные распределения которых являются нормальными, называются *гауссовскими.* В силу сказанного броуновское движение является гауссовским процессом. Из физических соображений ясно, что траектории броуновского движения непрерывны, поэтому в дальнейшем предполагается, что броуновское движение удовлетворяет еще одной аксиоме:

4) траектории процесса W п.н. непрерывны.

Докажем существование броуновского движения в случае, когда временной промежуток совпадает с $[0,1]$. Зададим его явную конструкцию, исходя из последовательности функций Шаудера и последовательности независимых случайных величин с одинаковым распределением $N(0,1)$.

Дадим определение функций Шаудера, но сначала напомним определение *функций Хаара.* Эти функции обозначаются $H_i(t)$, $i \in \mathbb{N}$, и задаются при $t \in [0,1]$. Функция H_1 тождественно равна 1. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ введем 2^n функций Хаара H_{2^n+k}, где $k = 1, 2, \ldots, 2^n$. Для этой цели разобъем отрезок $[0,1]$ на 2^n равных отрезков и пронумеруем их слева направо. Возьмем $k-$й такой отрезок. Вне его положим $H_{2^n+k}(t) = 0$. Разделим указанный отрезок пополам. На левой его половине положим $H_{2^n+k}(t) = 2^{n/2}$, а на правой – положим $H_{2^n+k}(t) = -2^{n/2}$.

Рассмотрим пространство $L^2[0,1]$ измеримых числовых функций x, заданных на отрезке $[0,1]$ и интегрируемых в квадрате: $\int_0^1 x^2(t)\,dt < +\infty$. Известно, что функции Хаара образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2[0,1]$ со скалярным произведением $(x,y) = \int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt$, где $x, y \in L^2[0,1]$. Поэтому любую функцию $x \in L^2[0,1]$ можно разложить в ряд по этой системе функций: $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i H_i$, где $a_i = (x, H_i)$. Кроме того, выполнено равенство Парсеваля: $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x, H_i)(y, H_i)$.

Построим непрерывные неотрицательные функции $S_i(t)$, называемые *функциями Шаудера*, на основе $H_i(t)$: при $t \in [0,1]$

$$S_i(t) = \int\limits_0^t H_i(s)\,ds.$$

Очевидно, что для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ при $i \in \left\{2^n+1, \ldots, 2^{n+1}\right\}$ и $t \in [0,1]$

$$|S_i(t)| \le \frac{2^{n/2}}{2^{n+1}} = 2^{-n/2-1} \tag{6}$$

и при разных $i_1, i_2 \in \left\{2^n+1, \ldots, 2^{n+1}\right\}$ функции S_{i_1} и S_{i_2} имеют непересекающиеся носители.

Установим два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. *Пусть числовая последовательность* $\{a_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ *такова, что* $a_i = O(i^{\varepsilon})$ *при* $i \to \infty$ *для некоторого* $\varepsilon \in (0, 1/2)$. *Тогда ряд* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i S_i(t)$ *сходится равномерно по* t *на отрезке* $[0,1]$.

Доказательство. Существует такая положительная постоянная K, что при всех $i \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|a_i| \le K i^{\varepsilon}$, поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ при всех $i \in \left\{2^n+1, \ldots, 2^{n+1}\right\}$ справедливо неравенство $|a_i| \le K 2^{(n+1)\varepsilon}$. В силу сказанного, учитывая (6) и то, что функции S_i при разных

$i \in \left\{2^n+1, \ldots, 2^{n+1}\right\}$ имеют попарно непересекающиеся носители, получаем, что при всех $t \in [0,1]$

$$\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} |a_i|\, S_i\left(t\right) \le K 2^{(n+1)\varepsilon} 2^{-n/2-1} = K 2^{\varepsilon-1} 2^{-n(1/2-\varepsilon)}.$$

Следовательно, при $m \in \mathbb{N}_0$, $t \in [0,1]$

$$\sum_{i=2^m+1}^{\infty} |a_i|\, S_i\left(t\right) \le \sum_{n=m}^{\infty} K 2^{\varepsilon-1} 2^{-n(1/2-\varepsilon)},$$

но правая часть стремится к нулю при $m \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – случайные величины, заданные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, причем $\xi_i \sim N\left(0,1\right)$ при $i \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольной постоянной $c \in \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ и п.в. $\omega \in \Omega$ существует такое натуральное число $N_0\left(c,\omega\right)$, что при всех $i \ge N_0\left(c,\omega\right)$ будет $|\xi_i| < c\sqrt{\ln i}$.*

Доказательство. Нам потребуется лемма Бореля-Кантелли, утверждающая, что если случайные события $A_1, A_2, \ldots$ таковы, что $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(A_i\right) < +\infty$, то для п.в. $\omega \in \Omega$ в последовательности $A_1, A_2, \ldots$ произойдет лишь конечное число событий. Заметим, что если $\xi \sim N\left(0,1\right)$, то при $x > 0$

$$\mathbf{P}\left(\xi \ge x\right) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}. \qquad (7)$$

Действительно,

$$\mathbf{P}\left(\xi \ge x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-u^2/2} du = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{+\infty} \frac{1}{u} de^{-u^2/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{+\infty} \frac{1}{u^2} e^{-u^2/2} du \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}.$$

Поэтому при $i \ge 2$

$$\mathbf{P}\left(|\xi_i| \ge c\sqrt{\ln i}\right) \le \frac{2}{c\sqrt{2\pi \ln i}} e^{-\left(c^2 \ln i\right)/2} = \frac{2 i^{-c^2/2}}{c\sqrt{2\pi \ln i}}.$$

При $c > \sqrt{2}$ ряд $\sum_{i=2}^{+\infty} i^{-c^2/2}/\sqrt{\ln i}$ сходится. Следовательно, для п.в. ω лишь при нескольких натуральных i выполняется неравенство $|\xi_i\left(\omega\right)| \ge c\sqrt{\ln i}$. Лемма доказана.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P). Рассмотрим пространство $L^2 = L^2\left(\Omega, F, P\right)$, состоящее из случайных величин, заданных на (Ω, F, P) и имеющих конечный второй момент. Пусть $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ – случайные величины из L^2. Говорят, что последовательность $\{\eta_n\}$ сходится *в среднем квадратическом* к величине η при $n \to \infty$ (обозначение: $\eta_n \overset{ср.\ кв.}{\to} \eta$), если $\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\eta_n - \eta\right)^2 = 0$. Можно показать, что последовательность $\{\eta_n\}$

сходится в среднем квадратическом при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\left(\eta_m - \eta_l\right)^2 \to 0$ при $m, l \to \infty$ (критерий Коши). Аналогично вводится понятие сходимости в среднем квадратическом для последовательности случайных векторов.

Теорема 2. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\xi_1 \sim N(0,1)$; пусть $S_1, S_2, \ldots$ – функции Шаудера. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} S_i(t)\xi_i$ сходится п.н., причем равномерно по $t \in [0,1]$, и случайный процесс $\{W(t)\,,\ t \in [0,1]\}$, определяемый при $t \in [0,1]$ формулой*

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} S_i(t)\xi_i, \tag{8}$$

является броуновским движением.

Доказательство. В силу лемм 1 и 2 для п.в. ω ряд в правой части (8) сходится равномерно по t на отрезке $[0,1]$. Функции $S_i(t)$, $t \in [0,1]$, непрерывны при любом $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, для п.в. ω правая часть (8) является непрерывной по t функцией.

Покажем, что формула (8) верна не только в смысле сходимости п.н., но и в смысле сходимости в среднем квадратическом, т.е. для каждого $t \in [0,1]$ при $n \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} S_i(t)\xi_i \overset{ср.\ кв.}{\to} W(t)\,. \tag{9}$$

Заметим, что при $m > l$

$$\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{m} S_i(t)\xi_i - \sum_{i=1}^{l} S_i(t)\xi_i\right)^2 = \mathbf{E}\left(\sum_{i=l+1}^{m} S_i(t)\xi_i\right)^2 = \sum_{i=l+1}^{m} S_i^2(t).$$

Вспоминая свойства функций Шаудера, видим, что

$$\sum_{i=2}^{\infty} S_i^2(t) \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{2^n < i \le 2^{n+1}} S_i^2(t) \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} < +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{m,l\to\infty} \sum_{i=l+1}^{m} S_i^2(t) = 0,$$

т.е. выполнен критерий Коши для последовательности $\sum_{i=1}^{n} S_i(t)\xi_i$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, левая часть соотношения (9) сходится в среднем квадратическом. Поскольку и сходимость п.н., и сходимость в среднем квадратическом влекут сходимость по вероятности, то пределы $\sum_{i=1}^{n} S_i(t)\xi_i$ в обоих случаях будут равны п.н., откуда и следует требуемое утверждение (9).

Покажем справедливость свойств 1), 2), 3) определения 2.

1) Поскольку $S_i(0) = 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то $W(0) = 0$.

2) Известно, что если последовательность нормальных случайных векторов сходится п.н., то ее предел является нормальным случайным вектором. Поскольку для $m \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_m \in [0,1]$ при $n \to \infty$ п.н.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} S_i(t_1)\,\xi_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} S_i(t_m)\,\xi_i\right) \to \left(W(t_1), \ldots, W(t_m)\right)$$

и вектор слева является нормальным, то и вектор справа является нормальным.

3) Из соотношения (9) следует, что при $n \to \infty$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\left(t_1\right)\xi_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} S_i\left(t_m\right)\xi_i\right) \overset{ср.\ кв.}{\to} \left(W\left(t_1\right), \ldots, W\left(t_m\right)\right). \qquad (10)$$

Из соотношения (10) вытекает сходимость математических ожиданий и ковариаций компонент случайного вектора в левой части к соответствующим математическим ожиданиям и ковариациям компонент случайного вектора в правой части, поэтому при $n \to \infty$

3.1) $\mathbf{E}\sum_{i=1}^{n} S_i\left(t_1\right)\xi_i \to \mathbf{E}W\left(t_1\right)$ при $t_1 \in [0,1]$, но левая часть равна нулю, следовательно, $\mathbf{E}W\left(t_1\right) = 0$;

3.2) $\mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\left(t_1\right)\xi_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\left(t_2\right)\xi_i\right) \to \mathbf{E}W\left(t_1\right)W\left(t_2\right)$ при $t_1, t_2 \in [0,1]$, но левая часть равна $\sum_{i=1}^{n} S_i(t_1)S_i(t_2)$ и ее предел равен

$$\sum_{i=1}^{\infty} S_i(t_1)S_i(t_2) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(H_i, I_{[0,t_1]}\right)\left(H_i, I_{[0,t_2]}\right) = \left(I_{[0,t_1]}, I_{[0,t_2]}\right) = \min\left(t_1, t_2\right),$$

где $I_{[a,b]}\left(\cdot\right)$ – индикатор отрезка $[a,b]$ (предпоследнее равенство есть просто равенство Парсеваля). Следовательно, $\mathbf{E}W\left(t_1\right)W\left(t_2\right) = \min\left(t_1, t_2\right)$ при $t_1, t_2 \in [0,1]$. Теорема доказана.

Рассмотрим независимые броуновские движения $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots$ на отрезке $[0,1]$. Положим при $t \in [k, k+1)$, где $k \in \mathbb{N}$,

$$W\left(t\right) = \sum_{l=1}^{k} W^{(l)}\left(1\right) + W^{(k+1)}\left(t-k\right).$$

Нетрудно показать, что процесс W является броуновским движением на полуоси $[0, +\infty)$.