Лекция 8

Асимптотические свойства критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона

В дальнейшем рассматривается только критический случай. В следующей теореме, доказанной Колмогоровым, находится асимптотика *вероятности невырождения* $\mathbf{P}(T>n)$ при $n\to\infty$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}Z_1=1$ *и* $\mathbf{D}Z_1=\sigma^2$, $0<\sigma^2<+\infty$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathbf{P}(T>n)\sim\frac{2}{\sigma^2 n}.$$

Доказательство. Положим $P_n=\mathbf{P}(T>n)=\mathbf{P}(Z_n>0)$, $n\in\mathbb{N}_0$, тогда $P_n=1-\varphi_n(0)$ и $P_{n+1}=1-\varphi_{n+1}(0)$. Следовательно, $P_{n+1}=1-\varphi(1-\ P_n)$. Полагая $g(s)=1-\varphi(1-s)$, $s\in[0,1]$, находим, что

$$P_{n+1}=g(P_n). \tag{1}$$

Если $\mathbf{D}Z_1<+\infty$, то $\mathbf{E}Z_1(Z_1-1)<+\infty$, т.е. сходится числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)p_k=:2b$ (ясно, что $2b=\sigma^2+m^2-m=\sigma^2$). Следовательно, функция $\varphi(s)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$, причем $\varphi''(1)=2b$. Значит, и функция $g(s)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$. Заметим, что $g'(s)=\varphi'(1-s)$, $g''(s)=-\varphi''(1-s)$ при $s\in[0,1]$. Поэтому $g(0)=0$, $g'(0)=\varphi'(1)=m$ и $g''(0)=-\varphi''(1)=-2b$. По формуле Тейлора

$$g(s)=ms-bs^2+o\left(s^2\right),\qquad s\to 0. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2), учитывая, что в критическом случае $P_n\to 0$ при $n\to\infty$, получаем, что

$$P_{n+1}=mP_n-bP_n^2+o\left(P_n^2\right). \tag{3}$$

Поскольку (см. ограничение (8) предыдущей лекции) $\varphi(s)<\varphi(1)=1$ при $s\in[0,1)$, то $g(s)>0$ при $s\in(0,1]$. Поскольку $P_0>0$, то $P_1=g(P_0)>0$, $P_2=g(P_1)>0$ и т.д.

Рассмотрим последовательность $a_n=1/P_n$. В силу соотношения (3)

$$a_{n+1}-a_n=\frac{P_n-P_{n+1}}{P_nP_{n+1}}=\frac{bP_n^2(1+o(1))}{P_n^2(1-bP_n+o(P_n))}\underset{n\to\infty}{\to}b.$$

Следовательно, при $n\to\infty$

$$a_n=a_1+(a_2-a_1)+\ldots+(a_n-a_{n-1})\sim nb$$

и

$$P_n\sim\frac{1}{bn},$$

причем $b = \sigma^2/2$. Теорема доказана.

Прежде, чем доказывать следущую предельную теорему для критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона, обсудим имеющиеся в теории вероятностей средства доказательства такого рода теорем.

Как известно, при доказательстве предельных теорем широко используется понятие характеристической функции. Напомним, что если ξ – произвольная случайная величина, то ее *характеристической функцией* называется функция
$$\varphi(t) = \mathbf{E}\exp(it\xi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Важную роль играет *теорема непрерывности для характеристических функций.* Пусть $\varphi_n(\cdot)$ – характеристическая функция случайной величины ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ (все случайные величины ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, могут быть определены на разных вероятностных пространствах). Пусть при $t \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$$

и функция $\varphi(\cdot)$ непрерывна при $t = 0$. Тогда функция $\varphi(\cdot)$ является характеристической функцией некоторой случайной величины ξ и при $n \to \infty$

$$\xi_n \xrightarrow{D} \xi.$$

Обратно, если имеет место сходимость последовательности случайных величин ξ_n по распределению к случайной величине ξ, то выполняется сходимость характеристических функций при $t \in \mathbb{R}$.

В случае *неотрицательных* случайных величин удобнее пользоваться понятием преобразования Лапласа. Если ξ – неотрицательная случайная величина, то ее *преобразованием Лапласа* называется функция

$$\psi(\lambda) = \mathbf{E}\exp(-\lambda\xi), \quad \lambda \geq 0.$$

Отметим, что преобразование Лапласа определено и для *несобственной* неотрицательной случайной величины η, т.е. принимающей значение $+\infty$ с положительной вероятностью. Для такой случайной величины η полагаем при $\lambda \geq 0$
$$\psi(\lambda) = \mathbf{E}(\exp(-\lambda\xi);\ \xi < +\infty).$$

Сформулируем *теорему непрерывности для преобразований Лапласа.* Пусть $\psi_n(\cdot)$ – преобразование Лапласа (собственной) неотрицательной случаной величины η_n, $n \in \mathbb{N}$. Пусть при $\lambda > 0$ существует

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(\lambda) = \psi(\lambda).$$

Тогда $\psi(\cdot)$ – преобразование Лапласа некоторой (возможно, несобственной) случайной величины η и последовательность функций распределения $F_n(\cdot)$ случайных величин η_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится *в основном* при $n \to \infty$ к функции распределения $F(\cdot)$ случайной величины η, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

для тех $x \geq 0$, которые являются точками непрерывности функции $F(\cdot)$. Обратно, если последовательность функций распределения $F_n(\cdot)$ случайных величин η_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится *в основном* при $n \to \infty$ к функции распределения $F(\cdot)$ (возможно, несобственной) случайной величины η, то имеет место сходимость преобразований Лапласа при $\lambda > 0$.

При этом случайная величина η является собственной в том и только том случае, когда

$$\lim_{\lambda \to 0} \psi(\lambda) = 1.$$

Если это условие выполнено, то сходимость в основном равносильна сходимости по распределению, т.е. $\eta_n \overset{D}{\to} \eta$ при $n \to \infty$.

В случае *неотрицательных целочисленных* случайных величин удобнее пользоваться понятием производящей функции. Если ζ – неотрицательная целочисленная случайная величина, то ее *производящей функцией* называется функция

$$\chi(s) = \mathbf{E} s^{\zeta}, \ s \in [0,1].$$

Отметим, что производящая функция определена и для *несобственной* неотрицательной целочисленной случайной величины ζ, т.е. принимающей значение $+\infty$ с положительной вероятностью. Для такой случайной величины ζ полагаем $\chi(s) = \mathbf{E}\left(s^{\zeta};\ \zeta < +\infty\right)$ при $s \in [0,1]$.

Укажем *теорему непрерывности для производящих функций*. Пусть $\chi_n(\cdot)$ – производящая функция (собственной) неотрицательной целочисленной случайной величины ζ_n, $n \in \mathbb{N}$. Пусть при $s \in [0,1)$ существует

$$\lim_{n \to \infty} \chi_n(s) = \chi(s).$$

Тогда $\chi(s)$ при $s \in [0,1)$ является производящей функцией некоторой (возможно, несобственной) случайной величины ζ, т.е. $\chi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$, $s \in [0,1)$, где $p_k = \mathbf{P}(\zeta = k)$ при $k \in \mathbb{N}_0$ и $\sum_{k=0}^{\infty} p_k \leq 1$. Далее, при $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(\zeta_n = k) = p_k.$$

Обратно, если последняя сходимость справедлива при всех $k \in \mathbb{N}$, то имеет место сходимость производящих функций $\chi_n(s)$ к производящей функции $\chi(s)$ при $s \in [0,1)$.

Случайная величина ζ является собственной (т.е. $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$) в том и только том случае, когда $\lim_{s \to 1} \chi(s) = 1$. Если это условие выполнено, то рассматриваемая сходимость равносильна сходимости по распределению, т.е. $\zeta_n \overset{D}{\to} \zeta$ при $n \to \infty$.

Пусть ξ – случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $\mathbf{P}(A) > 0$. Обозначим $\{\xi \mid A\}$ случайную величину, заданную на вероятностном пространстве $(A,\ \mathcal{F} \cap A,\ \mathbf{P}(\cdot \mid A))$, где $\mathbf{P}(\cdot \mid A)$ – условная вероятностная мера ($\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(AB)/\mathbf{P}(A)$ при $B \in \mathcal{F} \cap A$) и определяемую формулой

$$\{\xi \mid A\}(\omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in A.$$

Теорема 2 (Яглом)**.** *Если* $\mathbf{E}Z_1 = 1$, $\mathbf{D}Z_1 = 2b$, $0 < b < +\infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{Z_n}{bn} \;\middle|\; Z_n > 0 \right\} \xrightarrow{D} \xi,$$

где ξ *– случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром* 1.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Лапласа левой части: при $\lambda > 0$

$$\mathbf{E}\left(e^{-\lambda Z_n/(bn)} \;\middle|\; Z_n > 0\right) = \frac{1}{\mathbf{P}\left(Z_n > 0\right)} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda Z_n/(bn)};\ Z_n > 0\right) =$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k/(bn)} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right), \tag{4}$$

где, напомним, $P_n = \mathbf{P}\left(Z_n > 0\right)$. Положим $N = \lfloor n/\lambda \rfloor$. Заметим, что по теореме 1 при $n \to \infty$

$$e^{-\lambda/(bn)} - 1 \sim -\frac{\lambda}{bn} \sim -P_N. \tag{5}$$

Зададим λ_n уравнением

$$e^{-\lambda_n/(bn)} - 1 = -P_N. \tag{6}$$

Очевидно, $\lambda_n = -bn \ln\left(1 - P_N\right)$ и (см. (5))

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda. \tag{7}$$

В силу соотношения (6)

$$e^{-\lambda_n k/(bn)} = \left(1 - P_N\right)^k.$$

Откуда, вспоминая соотношение (4), находим, что

$$\mathbf{E}\left(e^{-\lambda_n Z_n/(bn)} \;\middle|\; Z_n > 0\right) = \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right)\left(1 - P_N\right)^k. \tag{8}$$

По формуле полной вероятности

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(Z_n = k\right)\left(1 - P_N\right)^k = \mathbf{P}\left(Z_{n+N} = 0,\ Z_n > 0\right). \tag{9}$$

Действительно,

$$\mathbf{P}\left(Z_{n+N} = 0,\ Z_n > 0\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(Z_{n+N} = 0 \mid\ Z_n = k\right) \mathbf{P}\left(Z_n = k\right)$$

и

$$\mathbf{P}\left(Z_{n+N} = 0 \mid\ Z_n = k\right) = \mathbf{P}\left(Z_N = 0 \mid\ Z_0 = k\right) =$$
$$= \mathbf{P}^k\left(Z_N = 0\right) = \left(1 - P_N\right)^k.$$

Из формул (8) и (9) следует, что

$$\mathbf{E}\left(e^{-\lambda_n Z_n/(bn)} \;\middle|\; Z_n > 0\right) =$$

$$= \frac{1}{P_n}\mathbf{P}\left(Z_{n+N} = 0,\ Z_n > 0\right) = \frac{1}{P_n}\mathbf{P}\left(n < T \leq n + N\ \right) =$$

$$= \frac{1}{P_n}\left[\mathbf{P}\left(T > n\right) - \mathbf{P}\left(T > n + N\right)\right] = 1 - \frac{P_{n+N}}{P_n}.$$

Применяя к этому соотношению теорему 1, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda_n Z_n/(bn)} \;\middle|\; Z_n > 0\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+N} = 1 - \frac{1}{1+1/\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}. \tag{10}$$

Правая часть (10) есть преобразование Лапласа случайной величины ξ, имеющей показательное распределение с параметром 1.

Далее, поскольку

$$|\exp x_2 - \exp x_1| \leq \exp\left(\max\left(x_1, x_2\right)\right)|x_2 - x_1|$$

при $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, то

$$0 \leq \mathbf{E}\left(\left|e^{-\lambda Z_n/(bn)} - e^{-\lambda_n Z_n/(bn)}\right| \;\middle|\; Z_n > 0\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\left(e^{-\min(\lambda,\lambda_n)Z_n/(bn)}\left|\lambda_n - \lambda\right| \frac{Z_n}{bn} \;\middle|\; Z_n > 0\right) \leq$$

$$\leq \frac{|\lambda_n - \lambda|}{bn}\mathbf{E}\left(Z_n \mid Z_n > 0\right) = \frac{|\lambda_n - \lambda|}{bnP_n}$$

(здесь учтено, что $\mathbf{E}\left(Z_n \mid Z_n > 0\right) = 1/P_n$). Следовательно (см. (7)),

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(\left|e^{-\lambda Z_n/(bn)} - e^{-\lambda_n Z_n/(bn)}\right| \;\middle|\; Z_n > 0\right) = 0. \tag{11}$$

Из соотношений (10) и (11) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda Z_n/(bn)} \;\middle|\; Z_n > 0\right) = \mathbf{E}e^{-\lambda\xi},$$

что по теореме непрерывности для преобразований Лапласа влечет утверждение теоремы.